

ANALÝZA PRŮHYBŮ ŽELEZOBETONOVÝCH PRVKŮ S VYUŽITÍM POKROČILÝCH NUMERICKÝCH METOD

Karolina Nedomová, *

Katedra betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební,
České vysoké učení technické v Praze, Thákurova 7/2077, 166 29 Praha 6, Česká republika.
karolina.nedomova@fsv.cvut.cz

ABSTRAKT

Článek vychází z diplomové práce [2] a věnuje se problematice deformací oboustranně vyztuženého železobetonového nosníku obdélníkového průřezu. V článku je popsána problematika deformací na železobetonovém nosníku oslabeném trhlinami s vlivem dotvarování betonu. Jsou zde použity dvě metody výpočtu deformací a následně jsou porovnány. Cílem také bylo porovnat metody stanovení ohybových tuhostí po délce nosníku. V tomto článku je popsán výpočetní program, který stanoví průhyb na nosníku s proměnnou ohybovou tuhostí a porovná výpočetní metody stanovení průhybu i metody stanovení ohybové tuhosti.

KLÍČOVÁ SLOVA

Mezní stav použitelnosti • průhyb • železobetonový nosník • metoda konečných prvků • diferenciální rovnice průhybové čáry • výpočetní pomůcka • dotvarování

ABSTRACT

This paper is based on master's thesis [2] dealing with the deformation of a reinforced concrete beam of rectangular cross-section double-sided reinforced. In this paper, the problem of deformation of a cracked reinforced concrete beam with the effect of concrete creep is described. Two methods of deformation calculation are used and compared. In this paper, a comparison of methods of determining bending stiffness along the beam length is presented. Computer program implementing those methods is described. The program computes deflection of a beam with variable bending stiffness, and it allows the user to compare the results of various deflection calculation methods and various bending stiffness calculation methods.

KEYWORDS

Serviceability limit state • deflection • reinforced concrete beam • finite element method • differential equations of the deflection curve • calculation tool • concrete creep

1. ÚVOD

Tento článek se věnuje problematice deformací štíhlých vodorovných prutů, pro které můžeme zavést předpoklad chování označovaný jako Bernoulliho – Navierova hypotéza. Dle této hypotézy průřezy po deformaci zůstávají kolmé na deformovanou střednici (derivace průhybové čáry v daném místě je rovna natočení v daném místě). Dále uvažujeme, že štíhlý prut je železobetonový nosník obdélníkového průřezu oboustranně vyztužený. Průhyby jsou počítány ve výpočetních aplikacích vytvořených v programovacím prostředí Matlab. Nosníky jsou uvažovány s proměnnou ohybovou tuhostí po délce nosníku, která je vyvolána oslabením průřezů trhlinami. Výpočet ohybové tuhosti je prováděn dvěma způsoby. Je zde použit normový [1] postup, který je dále porovnáván s výpočtem ohybové tuhosti získané z pracovních diagramů materiálů a uvažovaného zatížení. Článek se také zabývá porovnáním výsledků ze dvou výpočetních metod, které lze využít ke stanovení průhybu. První metodou je řešení průhybů pomocí diferenciální rovnice průhybové čáry, která je porovnána s metodou konečných prvků.

2. TEORIE

Železobetonové prvky vykazují po své délce proměnnou ohybovou tuhost způsobenou porušením průřezů trhlinami. V normě [1] je uvedeno, že pro prvky namáhané převážně ohybem je odpovídající předpoklad chování vyjádřen následujícím vztahem:

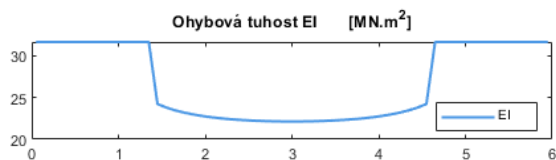
$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I; \quad (1)$$

kde

- α je uvažovaná přetvárná veličina;
- α_I, α_{II} jsou hodnoty parametru vypočteného pro stav bez trhlin a s plně rozvinutými trhlinami;
- ζ rozdělovací součinitel (kterým se umožňuje zohlednit tahové zpevnění průřezu).

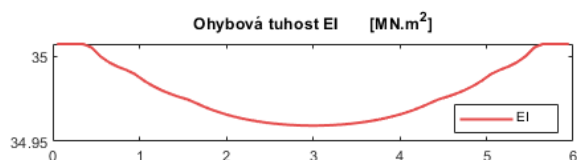
Pokud použijeme tento postup pro prostě podepřený nosník rovnoměrně zatížený, hodnoty ohybové tuhosti po délce nosníku budou mít průběh znázorněný viz Obr. 1.

* Školitel: Ing. Radek Štefan, Ph.D.



Obr.1: Hodnoty ohybové tuhosti po délce nosníku

V případě, že průběh ohybové tuhosti získáme z pracovních diagramů materiálů, je průběh ohybové tuhosti pro prostě podepřený nosník se stejnými vstupními parametry znázorněn na Obr.2.

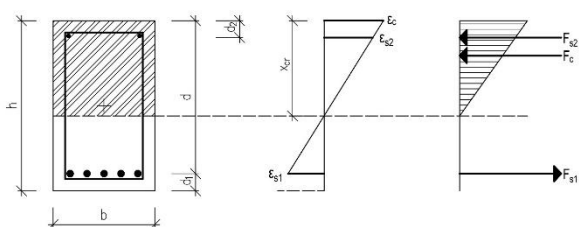


Obr.2: Hodnoty ohybové tuhosti po délce nosníku

Na první pohled je vidět, že tvar obou průběhů si je podobný ale je důležité si povšimnout, že ohybové tuhosti získané postupem z normy [1] jsou značně nižší mají větší rozptyl hodnot.

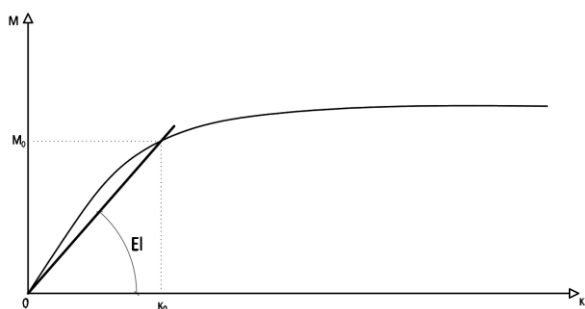
2.1. Ohybová tuhost stanovená z pracovních diagramů

Pro libovolný průřez lze sestavit pracovní diagram průřezu. V našem případě je uvažován betonový obdélníkový průřez vyztužený při horním i spodním povrchu betonářskou výztuží viz Obr.3.



Obr.3: Schéma obdélníkového ŽB průřezu

Pracovní diagram průřezu je průběh závislosti křivosti (vodorovná osa) a ohybového momentu (svislá osa) viz Obr.4.



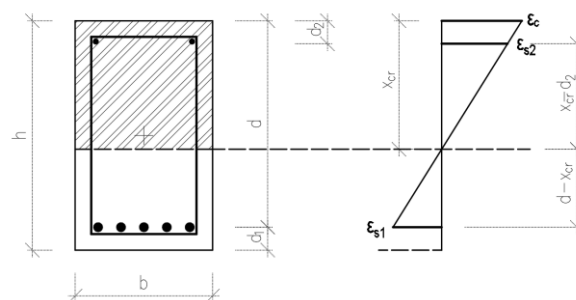
Obr.4: Závislost křivosti a ohybového momentu

Sestavení diagramu průřezu probíhá ve dvou cyklech. V prvním cyklu je zvolena hodnota křivosti. Pro tuto zvolenou křivost proběhne uvnitř prvního cyklu druhý cyklus, který hledá

polohu neutrální osy tak aby v průřezu nastala rovnováha vnitřních sil. V druhém cyklu neznámou hodnotu představuje velikost přetvoření horních vláken betonu. Tuto hodnotu postupně volíme z intervalu $\langle 0, 0.0035 \rangle$ a dopočítáváme hodnotu tlačené výšky betonu:

$$x^e = \frac{\varepsilon_c^e}{\kappa^e} \quad (2)$$

Dále si stanovíme hodnoty přetvoření ve spodní a horní výztuži viz Obr.5



Obr.5: Geometrie přetvoření materiálů v průřezu

$$\varepsilon_{s1}^e = \varepsilon_c^e \cdot \frac{x^e - d}{x^e}; \quad (3)$$

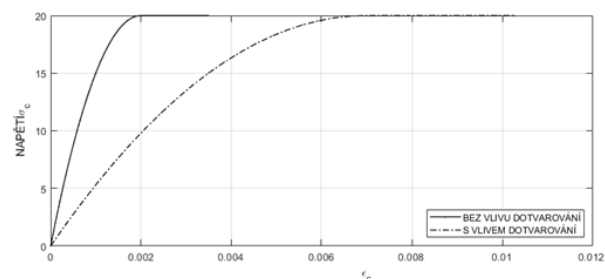
$$\varepsilon_{s2}^e = \varepsilon_c^e \cdot \frac{x^e - d_2}{x^e}; \quad (4)$$

kde

ε_{s1}^e je přetvoření v dolní ohybové výztuži;

ε_{s2}^e je přetvoření v horní ohybové výztuži.

Nyní pro vypočtené hodnoty přetvoření stanovíme velikosti napětí z pracovních diagramů materiálů. Pracovní diagramy byly převzaty z normy [1]. Pro ocel byl použit diagram s vodorovnou neomezenou větví. Pro beton byl použit parabolicko-rectangulární pracovní diagram s vlivem dotvarování. Dotvarování je do pracovního diagramu zohledněno pomocí součinitele dotvarování $\varphi_{(\infty, t_0)}$, jehož hodnota byla stanovena dle normového postupu [1] viz Obr.6.



Obr.6: Pracovní diagram včetně vlivu dotvarování betonu

Dotvarování betonu vede k postupnému zvyšování přetvoření při konstantním namáhání [3]:

$$\varepsilon_{c(t, t_0)} = \varepsilon_{c,el} (1 + \varphi_{(t, t_0)}); \quad (5)$$

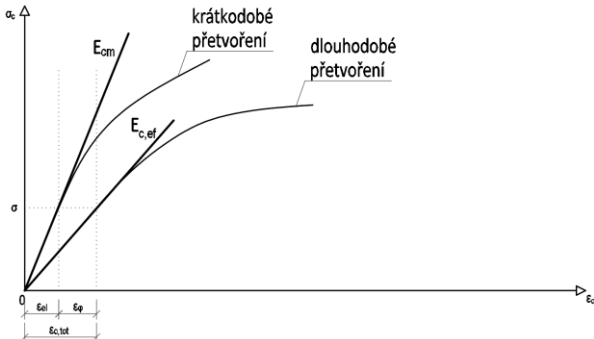
kde

$\varepsilon_{c(t, t_0)}$ je hodnota přetvoření v čase t ;

$\varepsilon_{c,el}$ je hodnota elastického přetvoření.

Pro stanovení napětí v betonu je uvažováno pouze s elastickými hodnotami přetvoření, které získáme z následujícího výrazu (obr.7):

$$\varepsilon_{c,el} = \frac{\varepsilon_c(t,t_0)}{(1+\varphi(t,t_0))} \quad (6)$$



Obr.7: Skutečný pracovní diagram vč. vlivu dotvarování [4]

Pro dosažení nejpřesnějších výsledků rozdělíme tlačnou oblast betonu na proužky cca o výšce 1 mm, vypočteme míru přetvoření pro každý proužek zvlášť a účinky sečteme.

Tento výpočetní postup je opakován do té chvíle, dokud na průřezu nenastane rovnováha vnitřních sil a následující podmínka bude splněna s velmi malou chybou:

$$0 = \sum F_{ci} + F_{s1} + F_{s2} \quad (7)$$

kde

F_{ci} je návrhová hodnota vnitřní síly od tlačeného betonu v jednotlivých proužcích;

F_{s1} je návrhová hodnota vnitřní síly od tažené výztuže;

F_{s2} je návrhová hodnota vnitřní síly od tlačené výztuže.

V případě, že nalezneme kombinaci vnitřních sil, která bude vyhovovat podmínce (7), přistoupíme k výpočtu ohybového momentu:

$$M^e = \sum(F_{ci} \cdot z_{ci}) + F_{s1} \cdot z_{s1} + F_{s2} \cdot z_{s2} \quad (8)$$

kde

z_{ci} je délka ramene pro jednotlivé betonové proužky;

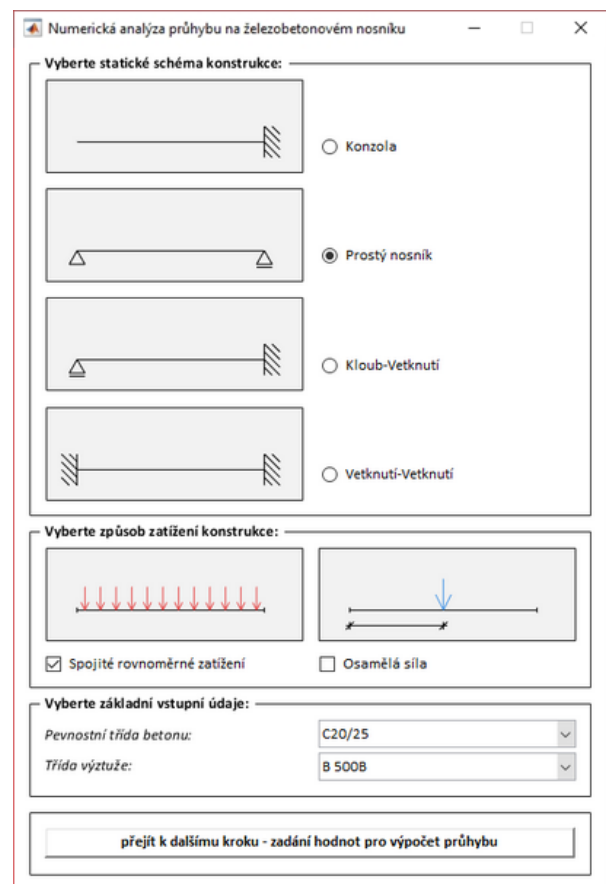
z_{s1} je délka ramene pro taženou výztuž;

z_{s2} je délka ramene pro tlačenou výztuž.

Hodnotu ohybového momentu M^e , která přísluší zvolené křivosti κ^e v každém kroku zapíšeme. V posledním kroku vyneseme hodnoty křivosti a jim příslušné ohybové momenty a sestojíme pracovní diagram průřezu neboli diagram závislosti křivosti a ohybového momentu. Tento diagram následně využijeme k odečtení hodnoty ohybové tuhosti sečnou metodou [5] pro libovolný železobetonový obdélníkový průřez.

3. POROVNÁNÍ VÝPOČETNÍCH METOD

Na katedře betonových a zděných konstrukcí (Fakulta stavební, ČVUT v Praze) byl vytvořen výpočetní program, který porovnává hodnoty průhybů získané použitím diferenciální rovnice průhybové čáry a metodou konečných prvků. Tento program stanovuje maximální hodnotu průhybu na železobetonovém nosníku obdélníkového průřezu vyztuženém při obou površích. Ohybová tuhost je stanovována pro jednotlivé dílky, na které je nosník pomyslně rozdělen, postupem uvedeným v normě [1]. Výpočet lze provést na čtyřech statických schématech viz Obr.8. Zatížení nosníku lze uvažovat jako rovnoměrné spojitě nebo zatížení osamělým břemenem, případně jejich kombinací. Zadávací okno programu je zobrazeno na Obr.8 a Obr.9.



Obr.8: Okno se vstupními parametry I

Numerická analýza průhybu na železobetonovém nosníku

Vstupní hodnoty pro výpočet průhybu:

Kategorie konstrukce: A - Obytné plochy

Délka nosníku: 6 m

Rozměry průřezu: - výška průřezu: $h = 0.45$ m
- šířka průřezu: $b = 0.3$ m

Stálé charakteristické zatížení - g : 10 kN/m

Proměnné charakteristické zatížení - q : 5 kN/m

Stálé charakteristické zatížení - G : 5 kN

Proměnné charakteristické zatížení - Q : 3 kN

Vzdálenost bodové síly od levé podpory: 3 m

Třída cementu: CEM N

Modul pružnosti betonu: 31 GPa

Modul pružnosti oceli: 200 GPa

Průměr dolní ohybové výtluže: 10 mm

Počet prutů dolní ohybové výtluže: 3 ks

Průměr horní výtluže: 10 mm

Počet prutů horní výtluže: 3 ks

Průměr třmínků: 10 mm

Krytí třmínků: 20 mm

Relativní vlhkost okolního prostředí: 50 %

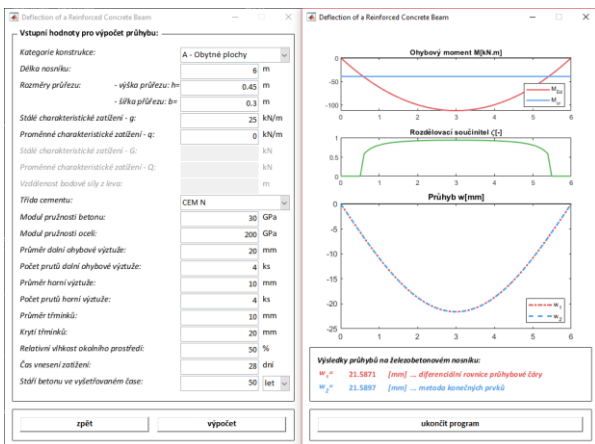
Čas vnesení zatížení: 28 dní

Stáří betonu ve vyšetřovaném čase: 100 let

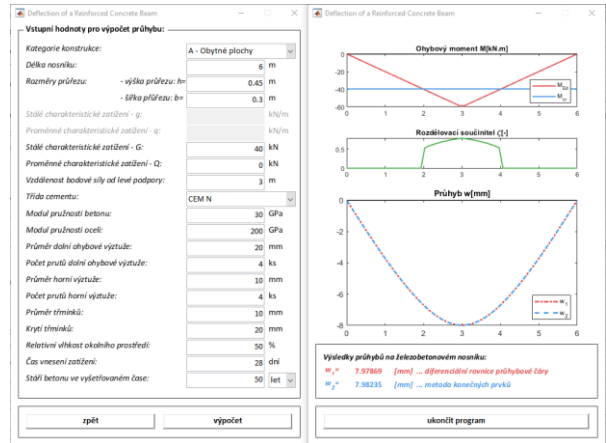
zpět výpočet

Obr.9: Okno se vstupními parametry II

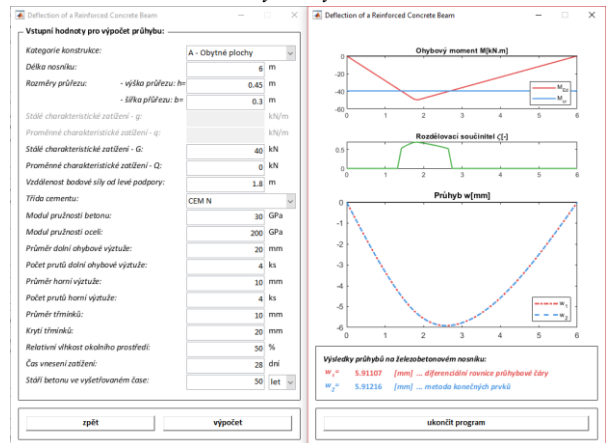
Po zadání všech vstupních parametrů potřebných k výpočtu průhybu včetně dotvarování betonu se uživateli zobrazí okno s výsledky. V horní části okna s výsledky je vykreslen průběh ohybového momentu včetně hodnoty kritického momentu. Dále pod ohybovým momentem je vykreslen průběh hodnoty rozdělovacího součinitele ζ . Dále jsou zde vykresleny hodnoty průhybů po délce nosníku získané z diferenciální rovnice průhybové čáry a z metody konečných prvků. Na následujících obrázcích jsou prezentovány zjištěné výsledky (Obr.10-14).



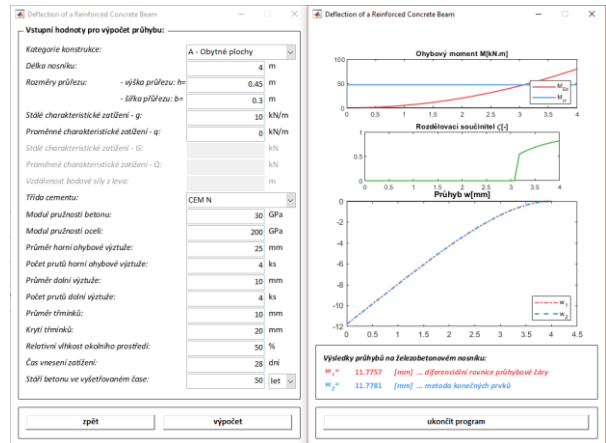
Obr.10: Okno s výsledky rovnoměrné zátížení



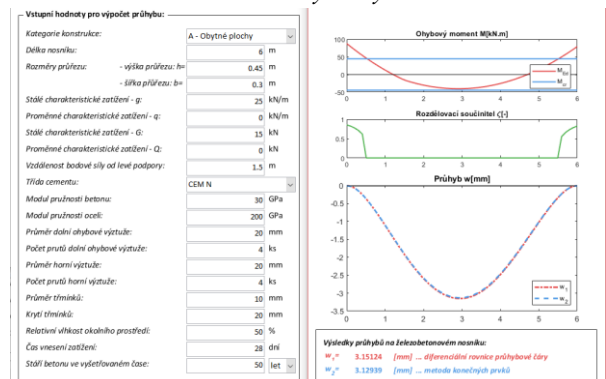
Obr.11: Okno s výsledky osamělé břemeno



Obr.12: Okno s výsledky excen. osamělé břemeno



Obr.13: Okno s výsledky konzola



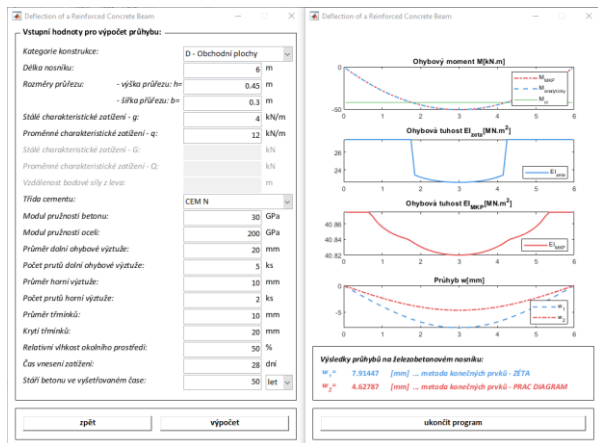
Obr.14: Okno s výsledky vetknutý nosník

V závěru lze říci, že volba výpočetní metody nemá vliv na spočtené hodnoty průhybu. Obě metody vykazují stejné výsledky, které se liší na druhém či třetím desetinném místě v mm.

4. POROVNÁNÍ PRŮHYBŮ PRO RŮZNÉ OHYBOVÉ TUHOSTI

Na katedře betonových a zděných konstrukcí (Fakulta stavební, ČVUT v Praze) byl vytvořen výpočetní program, který porovnává hodnoty průhybů pro dvě různé metody stanovení ohybové tuhosti po délce nosníku. V předchozí kapitole je porovnán výpočet průhybu pomocí ohybové čáry a metodou konečných prvků. Z výsledků vidíme, že z obou výpočetních metod jsme získali stejné výsledky. Jediný rozdíl je postup získání těchto výsledků. V tomto programu byla použita metoda konečných prvků ke stanovení deformací. Důvodem je, že metoda konečných prvků je univerzálnější a jednodušší. Při posuzování složitějších konstrukcí nebo posuzování konstrukcí zatížených složitějším zatížením je pro výpočet pomocí diferenciální rovnice průhybové čáry nutné vždy stanovit novou rovnici pro ohybový moment. Diferenciální rovnici průhybové čáry je vhodnější používat pro jednoduchý typ konstrukce ideálně s jednoduchým zatížením této konstrukce. Tento program používá metodu konečných prvků, která je celosvětově rozšířená a využívá ji většina komerčních statických programů. Tento program porovnává deformace vypočtené pro dva různé způsoby stanovení proměnné tuhosti po délce nosníku pro každý dílek. První způsob stanovení ohybové tuhosti je postup normový [1]. Druhý způsob stanovuje ohybovou tuhost z materiálových vlastností betonu a oceli viz kapitola 2.1. Použitím pracovních diagramů materiálů stanovíme pracovní diagram průřezu. Následně dle zakřivení nosníku vyvolané působícím zatížením, odečteme z pracovního diagramu průřezu jeho ohybovou tuhost. Tento postup budeme opakovat do té doby, dokud se hodnoty průhybu prakticky přestanou měnit. Jako kontrolu výpočtu na nosníku metodou konečných prvků spočteme a vykreslíme průběh ohybových momentů a porovnáme s ohybovým momentem stanoveným na nosníku analyticky.

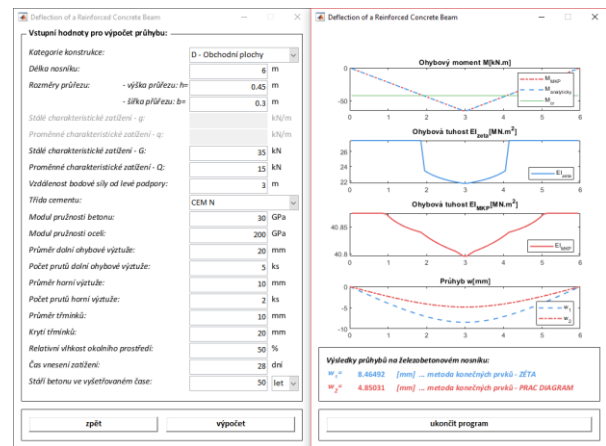
Zadávací okna jsou stejná jako v předchozím programu, a proto zde budou pouze prezentovány výsledky (Obr.15).



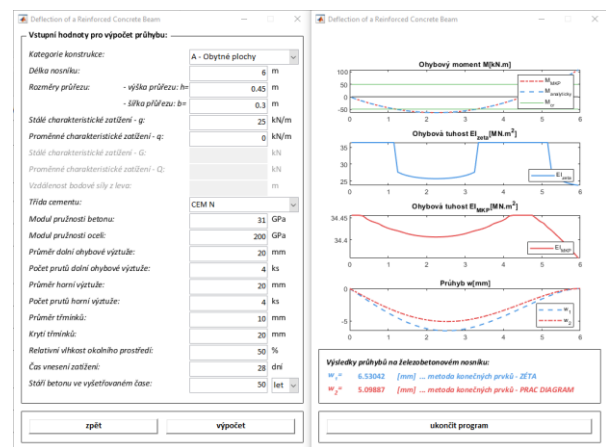
Obr.15: Okno s výsledky prostý nosník

Uspořádání výsledků v tomto programu je podobné jako v předchozím programu. Vlevo se nachází okno se zadávacími poli. Po stisknutí tlačítka výpočet se zobrazí na pravé okno s výsledky. V horní části okna je vykreslený ohybový moment, který na konstrukci působí. Červeně se vykresluje moment stanovený metodou konečných prvků. Modře se vykresluje moment vypočtený analyticky. Zeleně se vykresluje hodnota kritického momentu. Průběhy ohybového momentu pro MKP i analytické vyjádření by mělo vždy vycházet stejně. Tyto hodnoty jsou počítané různými metodami, a tudíž pokud průběhy vychází stejně, lze říci, že metody výpočtu fungují správně. Další dvě okna slouží k vykreslení hodnot ohybových tuhostí, které se mění po délce nosníku. V prvním okně se vykresluje tuhost určená pomocí rozdělovacího součinitele ζ dle [1]. Ve druhém okně se vykresluje ohybová tuhost vypočtená z pracovních diagramů průřezu. V posledním okně vidíme průběhy deformací, vypočteny pro normovou tuhost, kde značíme průhyb w_1 a pro tuhost určenou z pracovního diagramu, kde značíme průhyb w_2 . Maximální hodnoty průhybů jsou zapsány do kolonky pro výsledky v dolní části okna.

Na dalších obrázcích jsou prezentovány výsledky stanovené pro další statická schémata a jiná zatížení působící na prut. (Obr.16-17).



Obr.16: Okno s výsledky osamělě břemeno



Obr.17: Okno s výsledky osamělě kloub-vetknutí

Výsledky vypočtených průhybů se značně liší. Nelze jednoznačně stanovit poměrný rozdíl těchto hodnot. Výpočet průhybu je závislý na mnoha faktorech a ty ovlivňují míru rozdílů

získaných výsledků. Největší rozdíly vykazovaly výsledky vypočtené na konzolách. Tento rozdíl je způsoben velkou koncentrací trhlin kolem podpory. Naopak průřezy vzdálenější od podpory jsou trhlínami téměř neovlivněné a norma [1] tuto skutečnost nezohledňuje.

5. ZÁVĚR

V závěru lze říci, že metoda výpočtu průhybu pomocí průhybové čáry je výhodnější pouze pro jednoduché typy konstrukcí a zatížené jednoduchým zatěžovacím schématem. V případě složitějších tvarů konstrukce či složitějšího obrazce zatížení je výhodnější použít metodu konečných prvků, která je ve všech směrech univerzálnější. Z porovnání výpočtu ohybových tuhostí po délce nosníku zjištěné normovým postupem [1] a přesnější numerickou metodou vyplývá, že normový způsob stanovení ohybových tuhostí, je více konzervativní, a tudíž výsledné hodnoty deformací se liší, norma je vždy na straně bezpečné. Míra rozdílů výsledků je pak ovlivněna statickým schématem dané konstrukce a mírou porušení trhlin po délce nosníku. Největší rozdíly ve výsledcích deformací jsou u konzol. Rozdíl těchto výsledků dosahuje až v řádu desítek procent, a to z důvodu porušení průřezu trhlínami pouze v blízkém okolí vetknutí konzoly do nosné konstrukce.

PODĚKOVÁNÍ

Tento článek byl vytvořen v rámci finanční podpory Studentské grantové soutěže ČVUT, č. projektu SGS19/034/OHK1/11.

REFERENCE

- [1] ČSN EN 1992-1-1 Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby. Praha: Český normalizační institut, 2016.
- [2] NEDOMOVÁ, Karolina: Analýza průhybů železobetonových prvků s využitím pokročilých numerických metod. Praha, 2019. Diplomová práce. ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Katedra betonových a zděných konstrukcí.
- [3] MENN, Christian a Paul GAUVREAU. Prestressed concrete bridges. Boston: Birkhäuser Verlag, 1990. ISBN 3-7643-2414-7.
- [4] ŠMEJKAL, Jiří. Dynamická interakce turbosoustrojí se základy. Plzeň, 2017. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/publication/319130618>
- [5] SERĘGA, Szymon a Adam WOSATKO. Numerical Prediction of Fire Resistance of RC Beams. Faculty of Civil Engineering, Krakov. Dostupné z: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.5019131>