

# MODELOVÁNÍ ZDĚNÝCH KLENBOVÝCH MOSTŮ

Marek Vokál, \*

Katedra betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební,  
České vysoké učení technické v Praze, Thákurova 7/2077, 166 29 Praha 6, Česká republika.  
marek.vokal@fsv.cvut.cz

## ABSTRAKT

Článek pojednává o problematice nevyztužených zděných silničních mostů, tj. konstrukcí, které jsou náchylné kromě porušení drcením i na porušení ztrátou stability. Byly shrnuty metody modelování zděných mostů a shrnuly se základní vlastnosti materiálu a způsobu jeho modelování. Jsou uvedeny příklady způsobů modelování, jejich výsledky a hodnocení jejich použitelnosti. Výsledky různých modelů jsou mezi sebou porovnány a jsou porovnány i s experimentálním měřením. Konstrukce jsou v souladu s platnou legislativou hodnoceny z hlediska mezního stavu únosnosti a mezního stavu použitelnosti. Článek hodnotí nutnost použití nelinearity ve výpočtu, shrnuje možnosti uvažování materiálové a geometrické nelinearity.

## KLÍČOVÁ SLOVA

Zdivo • Modelování • Nelinearita • Klenba • Zatížitelnost

## ABSTRACT

The paper deals with the problem of slender masonry structures, i.e. structures that are susceptible to failure by crushing and failure due to loss of stability. Modelling methods are summarized as well as main properties of modelled material. Examples of modelling methods, their results and assessment of their applicability are given. The results of different models are compared with each other and they are also compared with experimental measurements. Constructions are evaluated in accordance with valid standards in terms of ultimate limit state and serviceability limit state. The paper evaluates the necessity of using nonlinearities in the calculation, summarizes the possibilities of considering material and geometric nonlinearities.

## KEYWORDS

Masonry • Modelling • Non-linearity • Vault • Load carrying capacity

## 1. ÚVOD

Zdivo je materiál, který má v porovnání například s betonem nízkou pevnost v tlaku a prakticky zanedbatelnou pevnost v tahu. Proto se prvky ze zdiva navrhují pouze jako tlačené nebo namáhané kombinací tlakové síly a ohybového momentu

(výjimku tvoří např. výplňové stěny). U tlačných prvků je pro posouzení nutné znát pevnost v tlaku a způsob namáhání, zděné tlačené prvky jsou podle EN1996 vždy namáhané kombinací ohybového momentu a normálové síly. Velikost ohybových momentů závisí u štíhlých prvků na způsobu modelování, na minimální nutné excentricitě zatížení, jež stanovují normy a na štíhlosti prvku. Obecně lze modelování konstrukcí rozdělit na:

1. Modelování 1D
2. Modelování 2D
  - (a) Nosníkové prvky
  - (b) Plošné (desko-stěnové) prvky
3. Modelování 3D
  - (a) Nosníkové prvky
  - (b) Plošné prvky
  - (c) Objemové prvky

Podle způsobu modelování interakce mezi zdíci prvky a maltou rozlišujeme:

- Modelování obou materiálů zvlášť
- Homogenizace – vznik jednoho materiálu

Podle chování materiálů rozlišujeme:

- lineární chování materiálů
- nelineární chování materiálů, modelování porušení

Podle způsobu uvažování štíhlosti rozlišujeme:

- zanedbání štíhlosti
- geometricky nelineární výpočet, výpočet podle teorie druhého řádu
- aplikování přístupu normy

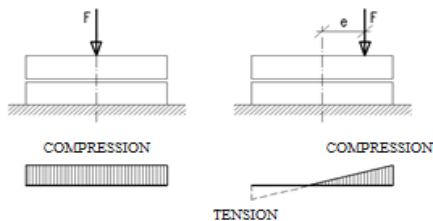
Je nutné si uvědomit, že norma, podle níž se mají zděné prvky navrhovat, bere v potaz pouze „stěny“, prvky, jež mohou vybočit z roviny stěny – ve směru výrazně menšího momentu setrvačnosti. Jedná se tak o prvek namáhaný kombinací normálové síly a ohybu v jedné rovině. Metodika ČSN EN1996-1-1 klenbám nevěnuje vůbec pozornost. Norma navíc nespecifikuje požadavky pro mezní stav použitelnosti. Pro zděné konstrukce klenb silničních mostů byla sestavena norma ČSN P 736213, pro zděné konstrukce klenb železničních mostů byl společností UIC vytvořen předpis 70778-3. Oba tyto předpisy vztahy pro posouzení konstrukce v mezním

\* Školitel: prof. Ing. Alena Kohoutková, Ph.D.

stavu použitelnosti uvádí a v rámci tohoto článku se z nich vychází.

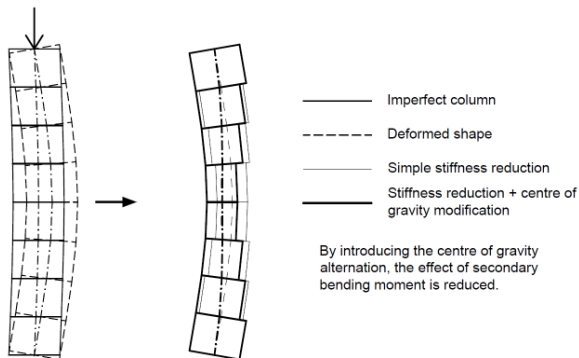
## 2. ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY POUŽITÝCH MODELŮ

Ve výpočtech je možnost materiálovou nelinearitu uvážit či nikoliv. Pokud je uvažována, je v rámci tohoto článku použit pracovní diagram s lineární větví v tlaku a nulovou v tahu (tahová pevnost je zanedbána):



Obrázek 1: Popis materiálové nelinearity.

Použité pracovní diagramy v mezním stavu únosnosti mohou být i jiné, například parabolické nebo lineárně-plastické. Vzhledem k užitému pracovnímu diagramu, jež vylučuje tažené části, je nutné změnit i těžiště prvku, pokud je zvolený model prutový. Tuto skutečnost ilustruje následující obrázek:



Obrázek 2: Princip chování zděného sloupu při užití materiálové nelinearity. Tým přístup je užit u nelineárního modelování kleneb.

Ve výpočtu je nutné zohlednit účinky geometrické nelinearity (druhý řád), pokud deformace mění výrazně geometrii konstrukce. K tomu může dojít u kleneb, které jsou velmi ploché (mají nízké vzepětí), protože tlakové síly v nich jsou značné a i malá deformace vyvodí změnu geometrie, vzepětí se ještě sníží například vlivem vlastní tíhy. Detaily ohledně výpočtu s využitím geometrické nelinearity viz (Vokál & Drahorád 2020) a (Bažant & Cedolin 2010), popřípadě (Timoshenko 1961).

V rámci výpočtů v tomto článku je vždy přistoupeno k užití homogenizace. Na tuto tematiku bylo vypracováno mnoho článků a experimentů, jež využili autoři normy a vznikl vztah pro stanovení pevnosti zdiva jako homogenizovaného materiálu:

$$f_k = K \cdot f_b^\alpha \cdot f_m^\beta \quad (1)$$

Kde:  $f_k$  je charakteristická hodnota pevnosti zdiva v tlaku,

$f_b$  je pevnost zdicího prvku,

$f_m$  je pevnost malty,

$K$  je konstanta podle typu zdicího prvku a malty,  $\alpha$ ,  $\beta$  konstanty.

## 3. POUŽITÉ MODELKY

### 3.1. Modelování 1D

Modelováním 1D se má v tomto článku na mysli přístup k posudkům zděného průřezu dle normy. Průřez je zatížen normálovou silou vypočtenou na zvoleném modelu, například lineárním. Následně se posoudí ve smyslu MSÚ podle základního vztahu normy:

$$N_{Ed} \leq N_{Rd} = \Phi t b f_d \quad (2)$$

$$\Phi = 1 - 2 \frac{e_i}{t} \quad (3)$$

Kde:  $f_d$  je návrhová hodnota pevnosti zdiva v tlaku,

$N_{Ed}$  je normálová síla od působících zatížení,

$N_{Rd}$  je normálová síla únosnosti,

$e_i$  je výsledná uvažovaná excentricita zatížení,

$b$ ,  $t$  jsou rozměry prvku (norma umožňuje pouze posouzení obdélníkového průřezu).

V rámci modelování a posuzování klenbových konstrukcí je třeba posoudit i smyk a ztrátu stability konstrukce kvůli porušení smykem. Pro smyk norma uvádí vztah:

$$f_{vk} = f_{vk0} + 0.4\sigma_d \quad (4)$$

který lze pro posudek převést na vztah:

$$V_{Ed} \leq V_{Rd} = (f_{vk0} + 0.4\sigma_d) \cdot b \cdot (h - 2e_u) / \gamma_M \quad (5)$$

Kde:  $f_{vk}$  je charakteristická hodnota počáteční pevnosti ve smyku při napětí v tlaku rovném 0,

$V_{Ed}$  je posouvající síla od zatížení,

$V_{Rd}$  je posouvající síla únosnosti,

$f_{vk0}$  je počáteční hodnota únosnosti malty ve smyku, při působení normálového napětí rovném 0,

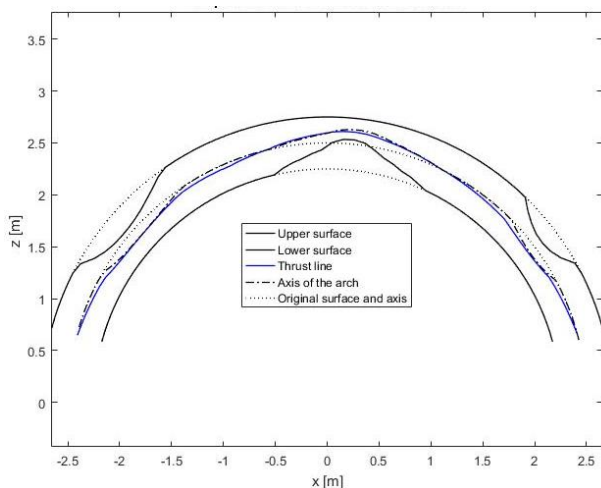
$\sigma_d$  je návrhové napětí v tlaku působící v uvažovaném průřezu nosného zděného prvku kolmo na smykovou sílu při odpovídající kombinaci zatížení založené na průměrném svislém napětí tlačené části stěny, která zajišťuje přenos smyku,

$e_u$  je výsledná uvažovaná excentricita zatížení.

S ohledem na mezní stav použitelnosti je normou ČSN P 736213 stanoveno, že excentricita působícího zatížení nesmí být větší, než je třetina výšky průřezu.

### 3.2. Modelování 2D

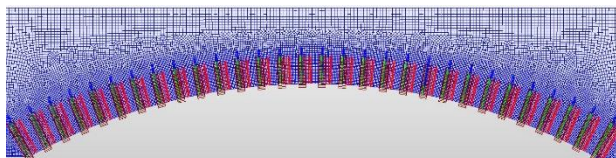
Modelování v jedné rovině může probíhat pomocí nosníkových prvků, nebo plošných. Nosníkové prvky jsou včetně nelineárního výpočtu použity např. v (Vokál & Drahorád 2018):



Obrázek 3: Prutový model s uvážením materiálové nelinearity, výsledné tloušťky a tlaková čára. Model vozidla je umístěn na levé části klenby.

Prutové prvky reprezentují střednici klenby, zatížení je vzhledem k jemnosti dělení konstrukce cca na 128 elementů zadáváno jako síly do jednotlivých uzlů. Konstrukce je krom zatížení vlastní tíhou a vlastní tíhou zeminy zatížena i vodorovným zemním tlakem v klidu. Roznášení zatížení dopravou je uvažováno pod úhlem  $30^\circ$ .

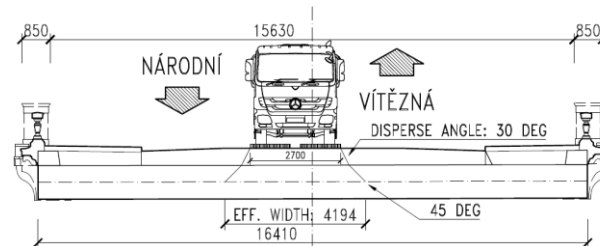
Plošné prvky byly použity pro modelování mostu ev. č. M-8 v Karlových Varech podle článku (Vokál & Drahorád, 2020), dostupné informace o mostu viz také (BMS):



Obrázek 4: 2D model mostu v Karlových Varech. Nelineární chování dosaženo pomocí „elastic links“ ve spárách.

Tento model je tvořen plošnými prvky reprezentující zeminu, plošnými prvky reprezentující jednotlivé kameny a pružnými rameny (tzv. „elastic links“) reprezentující spáry. Těchto pružných ramen je užito přibližně 20-30 po výšce každé spáry. Tato ramena mají klíčovou vlastnost – působí pouze v tlaku.

Modelování účinků 3D v modelech 2D probíhá u kolmých nebo přibližně kolmých mostů pomocí tzv. efektivní šířky. Tento výpočet spočívá ve stanovení, na jakou šířku klenby se reálně přeneše napětí z vozidla, respektive modelu pro stanovení zatížitelnosti. Vzhledem ke spolupůsobení kamenných bloků nebo cihel v příčném směru, kde nepůsobí normálové napětí, a tedy ani hlavní složka vedoucí k přenesení smykových napětí je spolupůsobení s nezatíženou částí klenby zanedbáno. Zatížená část klenby, a tedy i efektivní šířka se stanoví z geometrie příčného řezu graficky:

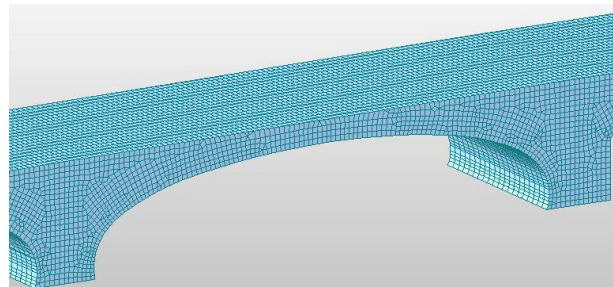


Obrázek 5: Stanovení efektivní šířky na Mostě Legii.

Roznášecí úhel je podle experimentů uvažován hodnotou  $30^\circ$  pro zeminu,  $45^\circ$  pro beton a zdivo. Efektivní šířka je proměnná po délce mostu, nejmenší je ve vrcholu (nebo obecně v místě s nejnižší tloušťkou vrstev). Tato nejmenší šířka se může na straně bezpečné uvažovat po délce klenby konstantní.

### 3.3. Modelování 3D

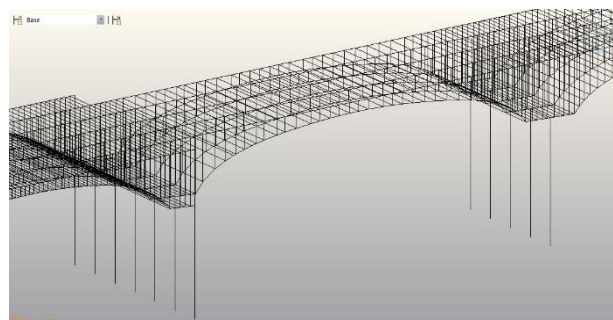
Pro modelování klenbové konstrukce ve 3D byly použity pro výpočet zatížitelnosti Mostu Legii jak prvky prutové, tak plošné, tak i objemové. 3D solid označuje model z objemových prvků:



Obrázek 6: 3D solid model.

Model z objemových prvků je tvořen prvky reprezentující zeminu a prvky reprezentující homogenizované zdivo.

V prutovém modelu se objevují pruty reprezentující zeminu (pouze svislé), pruty reprezentující klenbu (homogenizované zdivo) a pruty příčné vazby.



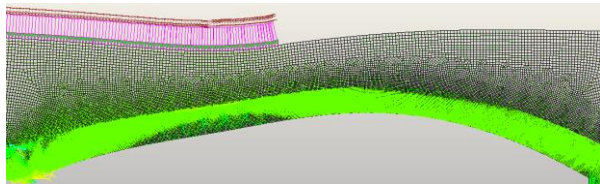
Obrázek 7: 3D prutový model – Most Legii.

Modelování konstrukce pruty je možné, jejich výhodou je rychlost výpočtu. Tento model lze zatížit proměnným zatížením dopravou, aniž by výpočet trval dny. U modelu z objemových prvků však může výpočet s proměnným zatížením trvat v řádu dnů. Z hlediska časové náročnosti záleží zejména na způsobu dělení konstrukce na prvky, při požadované přesnosti výsledků výpočtu musí být konstrukce dělena na elementy dostatečně jemně.

## 4. VÝSLEDKY MODELOVÁNÍ

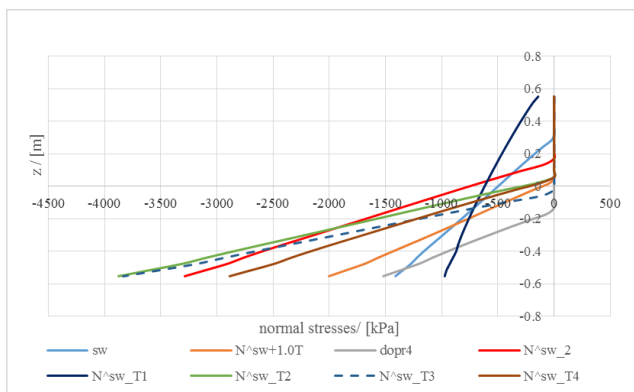
### 4.1. Hodnocení výsledků v podélném směru mostu

V případě mostu v Karlových Varech byly pro jeden ze zatěžovacích stavů (jednu z pozic proměnného zatížení) získány tyto průběhy hlavních napětí:



Obrázek 9: Průběh napětí klenby na mostě v Karlových Varech.

Na konstrukci jsou problematická místa, kde je minimální napětí, které se blíží nule a potažmo tahovým napětím, tedy otevírání spáry a překročení maximální přípustné excentricity působícího zatížení. Z obrázku je patrné, že při zatížení mostu dopravním zatížením na levé polovině mostu jsou kritické průřezy, ve kterých hrozí největší otevírání spáry, v patě a cca ve třetině rozpětí. Podrobný průběh napětí v patě klenby včetně hodnot přináší následující graf:



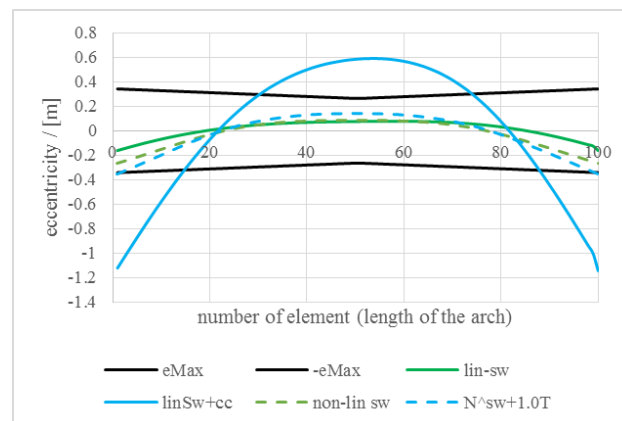
Obrázek 10: Průběh napětí v patě klenby na mostě v Karlových Varech.

Tento průběh byl získán z 2D nelineárního modelu. Průběh napětí potvrzuje, že chování klenby je nelineární (T označuje zatížení ochlazením, číslo označuje polohu zatížení na mostě, sw označuje vlastní tíhu,  $N^{\wedge}$  označuje nelineární kombinaci zatížení).

Získané výsledky odpovídají použitým modelům, z prutového získáme vnitřní síly, např. ohybové momenty (nebo napětí odpovídající ohybovým momentům), z desko-stěnového modelu získáme pouze hodnoty napětí a přetvoření. Abychom mohli porovnat výsledky prutového modelu s modelem desko-stěnovým, je nutné např. integrovat napětí z desko-stěnového modelu po výšce průřezu a tím získat ohybový moment.

Porovnání prutového modelu s lineárním chováním a desko-stěnového modelu s nelineárním chováním ukazuje značné rozdíly jak v získaných napětích, tak deformacích a tím potažmo i ve výsledných zatížitelnostech. Na obrázku 11 je vidět výsledná excentricita zatížení po délce mostu. Maximální přípustná excentricita pro splnění požadavků MSP je vyznačena černě. Je vidět, že při zatížení lineárního modelu teplotou

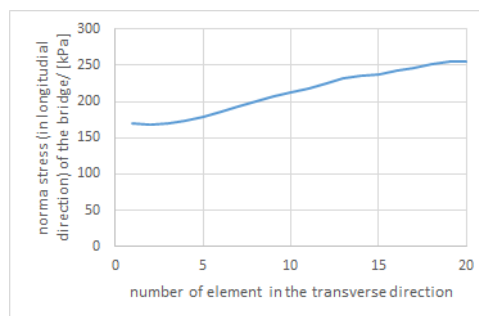
je mezní stav výrazně překročen, dokonce dochází k vystoupení tlakové čáry z průřezu, tedy ke kolapsu konstrukce. Na následujícím obrázku opět T označuje zatížení ochlazením, číslo označuje polohu zatížení na mostě, sw označuje vlastní tíhu,  $N^{\wedge}$  označuje nelineární kombinaci zatížení. eMax označuje limitní přípustnou excentricitu zatížení, lin označuje výsledek lineárního prutového modelu, non-lin označuje výsledek nelineárního desko-stěnového modelu.



Obrázek 11: Průběh excentricity zatížení po délce klenby.

### 4.2. Hodnocení výsledků v příčném směru mostu

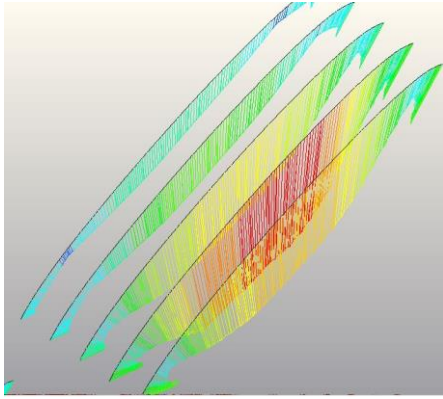
Při hodnocení příčného roznosu neboli chování v příčném směru mostu při zatížení, které není umístěno po celé šířce klenby, se uplatní hlavní výhoda 3D solid modelu, a to jeho schopnost vystihnout průběh napětí po šířce klenby.



Obrázek 12: Průběh napětí po šířce klenby ve vrcholu (Most Legii).

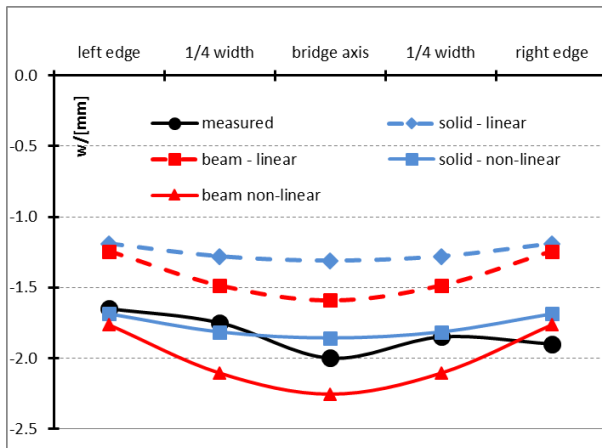
Při hodnocení výsledků modelu z objemových prvků s nelineárním chováním bylo zjištěno, že podle obr. 12 - při zatížení mostu na jedné jeho straně - se významnou měrou zapojí celá klenba, což je v rozporu se zjištěním o skutečném chování klenby v mezním stavu únosnosti. V mezním stavu použitelnosti by k podobnému mohlo dojít, jak dokazuje statická zatěžovací zkouška, viz obr 14, podrobně viz (Vokál & Drahorád 2019).

Výsledné namáhání jednotlivých nosníků reprezentující klenbu v prutovém modelu při zatížení na pravé straně mostu je vidět na následujícím obrázku:



Obrázek 13: Průběh ohybových momentů na obloucích mostu Legii ( $M$ -Max) od zatížení vozidlem na okraji.

Tvar funkce příčného roznosu, jež byl zjištěn u Mostu Legii pomocí zatěžovací zkoušky, zhruba odpovídá chování solid a prutového modelu, velikost vypočtených deformací však u těchto modelů zcela neodpovídá naměřeným hodnotám deformací. Velikost deformace z lineárních modelů je obecně podstatně nižší než z nelineárních modelů. Na druhou stranu nelineární desko-stěnový model popisovaný v tomto článku není schopen postihnout chování v příčném směru. Proto byla funkce, jež odpovídá nejlépe – solid non-linear – získána přenásobením výsledků ze 3D solid modelu konstantou  $K_{lin \times nelin} = w_{nelin} / w_{lin}$ , kde  $w_{nelin}$  je svislá deformace z nelineárního modelu od zatížení vozidly určenými pro zatěžovací zkoušku a  $w_{lin}$  je svislá deformace z lineárního modelu od zatížení vozidly určenými pro zatěžovací zkoušku na stejnou šířku, jaká byla zvolena u nelineárního modelu. Nejlepší funkce tedy byla získána „znelinearizováním“ lineárních výsledků 3D solid modelu.



Obrázek 14: Průběh vypočtených a měřených deformací po šířce mostu uprostřed pole 4.

## 5. DISKUSE

Z porovnání lineárního a prutového modelu konstrukce v podélném směru je patrné, že modelování kleneb lineárně neodpovídá skutečnosti, zejména výpočtový kolaps konstrukce s ohledem na zatížení změnou teploty není reálný, zmíněné klenby jsou teplotou namáhána cca století a ke kolapsu nedošlo.

Statická zatěžovací zkouška prokázala, že do přenosu zatížení se zapojí celá klenba. Nutno vzít ale v potaz, že klenba Mostu Legii má jedno z největších rozpětí klenbového mostu v ČR, tvar klenby se tak blíží prutu více než u obyčejné klenby menších rozpětí, a proto i míra příčného roznosu bude menší. Navíc přesnost měření deformací měla přibližně stejnou hodnotu, jako velikost deformací (v řádu milimetru). Proto není zatěžovací zkouška považována za zcela věrohodnou. Celkově tak 3D solid model nelze doporučit pro modelování kleneb (ani pro příčný, ani pro podélný směr).

Prutový model má tu výhodu, že tuhost příčné vazby může být změněna, pokud statik uváží, že roznos neodpovídá jeho zkušenostem. Příčný roznos tak může být modelován těmito prvky. Výhodou tohoto modelu je také skutečnost, že po většinu naší novodobé historie (poslední desítky let, před tím byla užívána grafická metoda) byl v praxi používán výhradně tento model, jsou s ním největší zkušenosti.

Autor článku neprováděl výpočty na 3D modelu s nelineárním chováním a porušováním ve všech směrech, jak to umožňuje software ATENA a další. Tyto modely vyžadují zadání obtížně zjistitelných až nezjistitelných parametrů, takže čas vynaložený na velmi náročné modelování není kompenzován reálnějšími výsledky. Autoři, kteří takové modely používají a tvrdí, že dosahují výborné shody s experimenty, většinou upravují parametry výpočtu tak, aby jim shoda s experimentem vyšla.

## 6. ZÁVĚR

Pro modelování kleneb je nevhodnější použití 2D nelineárního modelu. Příčný roznos lze řešit roznášecí efektivní šířkou, výsledek je na straně bezpečné. Pro srovnání výsledků příčného roznosu lze použít prutový model. Ten ale není vhodný pro modelování podélného směru a už vůbec ne pro modelování zatížení teplotou. Autor tohoto článku nedoporučuje ani 3D nelineární modely, které jsou založeny na vstupních parametrech, jež není prakticky možné přesně zjistit.

## PODĚKOVÁNÍ

Autor vyjadřuje svůj dík grantu XXX.

## Reference

- Bažant Z. P., Cedolin, L. (2010), Stability of structures; Elastic, inelastic fracture and damage theories, ISBN-13: 978-9814317030.
- Timoshenko, S. P., GERE, J. M. (1961), Theory of Elastic Stability, International student edition, McGraw-Hill.
- ČSN EN 1996-1-1+A1 (731101), Eurokód 6: Navrhování zděných konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla pro vyztužené a nevyztužené zděné konstrukce.
- ČSN EN P 736213 – navrhování zděných silničních mostů
- Honzík, V., Drahorád, M. (2017), Chování nevyztužených zděných pilířů vystavených mimostřednímu tlaku (The behavior of masonry columns loaded eccentrically), Stavebnictví 4/2017.
- BS 5628-1:2005 Code of practice for the use of masonry, Part 1: Structural use of unreinforced masonry.

- International Union of Railways. (2017), 70778-3: Recommendations for the inspection, assessment and maintenance of masonry arch bridges. <https://uic.org/>
- Vokál, M., Drahorád, M., (2018), The Load Bearing Capacity Of Railway Masonry Arch Bridges, Transactions Of Vsb - Technical University Of Ostrava, Civil Engineering Series, volume 18, number 2.
- Vokál M. (2019), Load Bearing Capacity of Stone Arches of Legion Bridge, Workshop doktorandů.
- Vokál, M., Drahorád, M. (pravděpodobně vyjde 2020), Load Carrying Capacity of Stone Arch Bridge in Karlovy Vary.
- BMS, Bridge management system, dostupné online: [bms.cle-vera.cz](https://bms.cle-vera.cz)