

# ANALÝZA VLIVU NÁHLÉ ZMĚNY GEOMETRIE NA NAPJATOST KROUCENÉHO ŽELEZOBETONOVÉHO PRVKU

Jan Kubát, \*

Katedra betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební,  
České vysoké učení technické v Praze, Thákurova 7/2077, 166 29 Praha 6, Česká republika.  
jan.kubat@fsv.cvut.cz

## ABSTRAKT

Železobetonové konstrukční prvky jsou nejčastěji namáhané ohybem a smykem, případně normálovou silou. Proto byla těmto typům namáhání historicky věnována největší pozornost. Často je ale zcela opomíjena skutečnost, že v mnoha případech dochází k nezanedbatelnému namáhání kroucením. V současnosti se tomuto typu namáhání věnuje jen malé množství výzkumných týmů ve světě a výsledky z nedávných let naznačují možné nedostatky současných návrhových postupů, které jsou zakotveny v platných a využívaných normách.

Předložený článek je speciálně zaměřen na problematiku prvků s náhlou změnou geometrie vystavených účinkům kroucení. Hlavní náplní článku je popis numerické analýzy vybraných problémů v programu ATENA Science. Vliv náhlé změny průřezu je porovnán s referenčními modely, hlavními sledovanými veličinami jsou moment na vzniku trhliny a moment na vzniku dosažení meze kluzu oceli.

## KLÍČOVÁ SLOVA

Změna průřezu • Kroucení • Železobeton • Metoda konečných prvků • Nelineární analýza

## ABSTRACT

Steel reinforced concrete structural elements are most often subjected to bending and shear, or normal force. Therefore, historically, the most attention has been given to these types of loading. However, the fact that in many cases there is also a considerable torque of reinforced concrete elements is often completely neglected. Only small number of research teams in the worldwide deals with this type of stress, and results of recent years show significant shortcomings of the current design practices, which are enshrined in the current design standards.

Presented paper is focused mainly on the issue of elements with sudden change in cross-section stressed by torque. The main part of the paper is then focused on nonlinear numerical analysis of elements with sudden change in cross-section stressed by torque, in the program ATENA Science. The effect of a sudden change in cross-section is compared with the reference models and the main monitored variables

are torsional load bearing capacity when the first crack occur and the torsional load bearing capacity when the yield strength of the reinforcement is reached.

## KEYWORDS

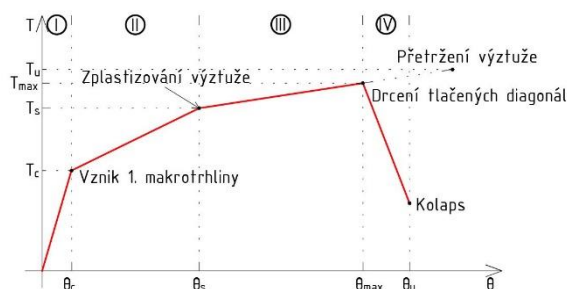
Change in Cross-section • Torsion • Reinforced Concrete • Finite Elements Method • Nonlinear Analysis

## 1. ÚVOD

Kroucení je jedním ze základních typů namáhání, kterému je v současné době věnována ta nejmenší pozornost. Většina výzkumu týkající se betonových konstrukcí je věnována přesnějšímu popisu reologických změn betonu, či vyztužování nebo zesilování betonových konstrukcí pomocí nových materiálů na bázi uhlíkových kompozitů. Navrhováním kroucených železobetonových se zabývá jen malé množství výzkumných týmů, které stále často vychází z experimentů provedených v 70. letech 20. století (např. Hsu 1968, Leonhard 1974)

Tento článek je věnován problematice náhlé změny geometrie po délce průřezu, ke které se autor dostal v rámci řešení individuálních projektů během studia, kde se ukázalo že při nelineárním výpočtu byla únosnost mnohem nižší než jaká byla předpokládána normovým výpočtem.

V rámci řešení je uvažováno pouze volné kroucení prutů, přestože by uvážení vlivu vázaného kroucení článek obohatilo a rozšířilo. Takový článek by byl příliš rozsáhlý a nebyl by prostor pro všechny aspekty.



Obrázek 1 – Ideální pracovní diagram krouceného železobetonového prvku,

\* Školitel: doc. Ing. Lukáš Vráblík, Ph.D.

## 2. ANALÝZA VYBRANÝCH PROBLÉMŮ

### 2.1. Přijaté předpoklady

S přihlédnutím na množství parametrů ovlivňující únosnost prvku, bylo přijato několik zjednodušujících předpokladů. Není-li uvedeno jinak, jsou uvažovány následující předpoklady:

- Prvek je namáhán pouze jedním typem namáhání – kroucení, průběh kroučícího momentu je po délce prvku konstantní
- Materiály a vyztužení prvků bylo navrženo v souladu s aktuálními požadavky uvedenými v ČSN EN 1992-1-1.

### 2.2. Komentář k výsledkům

Následující výsledky jsou prezentovány formou pracovního diagramu, který vyjadřuje závislost působícího kroučícího momentu na poměrném zkroucení. Poměrné zkroucení je uvažováno jako průměrné stanovené pomocí vztahu:

$$\theta = \frac{\varphi_x}{L} \quad (1)$$

kde  $\varphi_x$  je podélné pootočení na konci prvku  
 $L$  délka prvku.

Relativní zkroucení v místě vzniku trhliny může být lokálně mnohem vyšší.

### 2.3. Materiálové charakteristiky

Pro všechny modely jsou uvažovány návrhové hodnoty materiálových vlastností dle ČSN EN 1992-1-1. Pro stanovení vhodnosti překládaného řešení je stanoven stupeň bezpečnosti na základě předpokládaného zatížení v okamžiku porušení dle normového výpočtu v poměru s hodnotou získanou řešením numerických modelů.

#### 2.3.1. Beton

Materiálové charakteristiky betonu odpovídají třídě betonu C40/50 v návrhových hodnotách. Modul pružnosti byl zadán hodnotou 35 GPa, tahová pevnost betonu 1,667 MPa, tlaková pevnost 26,667 MPa. Lomová energie stanovená na základě tahové pevnosti hodnotou 41,7 N/m. Rotace trhlín nebyla umožněna.

#### 2.3.2. Výztuž

Výztuž použitá ve všech výpočetních modelech odpovídá třídě B 500B, které je předepsán bi-lineární pracovní diagram. Uvažovaná mez kluzu výztuže je 434,78 MPa, mez pevnosti výztužných prutů je 465,93 MPa

### 2.4. Výpočetní model

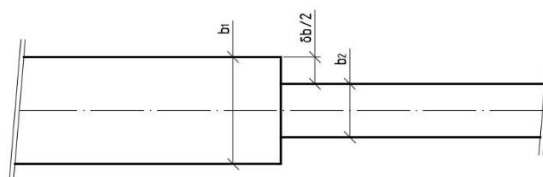
Analýza byla provedena pro čtyři dvojice modelů, se čtvercovým průřezem. První z každé dvojice modelů představuje prvek oslabený náhlou změnou geometrie, druhý model představuje referenční model který má po celé délce

menší z dvojice průřezů. K omezení počtu parametrů ovlivňujících výpočet průřezu sdílely těžišťovou osu, na které se nacházel i střed smyku. Hodnotící parametr rozlišující jednotlivé dvojice modelů byl průřezový modul ve volném kroucení, který byl stanoven na základě vztahu (2) odvozeného na základě Timoshenko 1951.

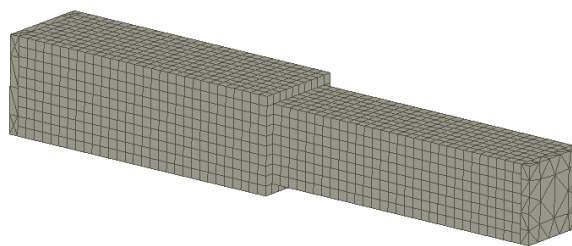
$$W_t = \frac{\pi^2}{24} b^2 h \frac{1 - \frac{192b}{\pi^5 h} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh\left(\frac{n\pi h}{2b}\right)}{\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[ 1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi h}{2b}\right)} \right]}, \quad (2)$$

Dosažením  $b = h$  do (2) lze vztah zjednodušit a přibližně stanovit hodnotu jako

$$W_t \cong 0,2082b^3 \quad (3)$$



Obrázek 2 – Schéma průřezů



Obrázek 3 – Axonometrie výpočetního modelu

Tabulka 1: Geometrie zkoumaných modelů

ozn.	$b_1$	$b_2$	$\delta b/2$	$W_{t,2}/W_{t,1}$
	[mm]	[mm]	[mm]	[%]
1	500	480	10	88,5
2	500	440	30	68,1
3	500	420	40	59,3
4	500	400	50	51,2

Na závěr analýzy byl na poslední dvojici modelů zkoumán vliv náběhů. Náběhy byly ve svém řezu tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku. V prvním případě toto rameno mělo délku 25 mm a představovalo polovinu z rozdílu průřezů, v případě druhém 50 mm, což odpovídá pokrytí celé změny geometrie.

### 2.5. Vyztužení

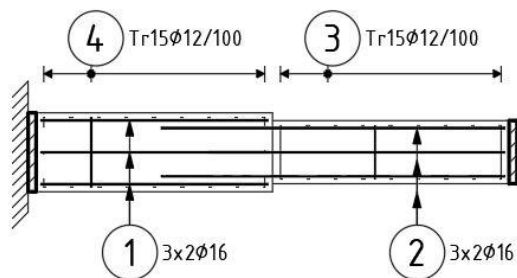
Veškeré modely jsou vyztuženy pomocí výztuže B 500B, jednotlivé výztužné pruty jsou modelovány diskretně ve skutečné pozici, jakou by v průřezu zaujímal. Z charakteru studie nebylo vyztužení navrženo na přenesení konkrétního zatížení, ale bylo navrženo, aby přeneslo moment vyšší než je

moment na vzniku trhliny. Únosnost vyztuženého průřezu byla stanovena podle normového vztahu pro stanovení mezního stavu únosnosti krouceného prvku dle (4)

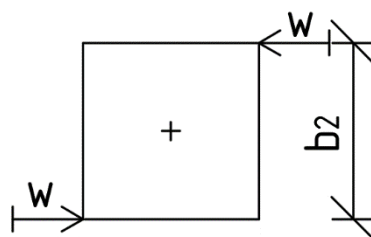
$$T_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s_l} \cdot 2 \cdot A_k \cdot f_{yd} \cdot \cot g(\theta) \quad (4)$$

Navrhovaný sklon tlakových diagonál  $\theta$  byl uvažován hodnotou  $\cot g(\theta) = 1,0$ ,  $\theta = 45^\circ$ .

Veškeré konstrukční zásady byly dodrženy.



Obrázek 4 – Schéma vyztužení průřezů



Obrázek 5 – Schéma zatěžování modelů

### 3. VÝSLEDKY

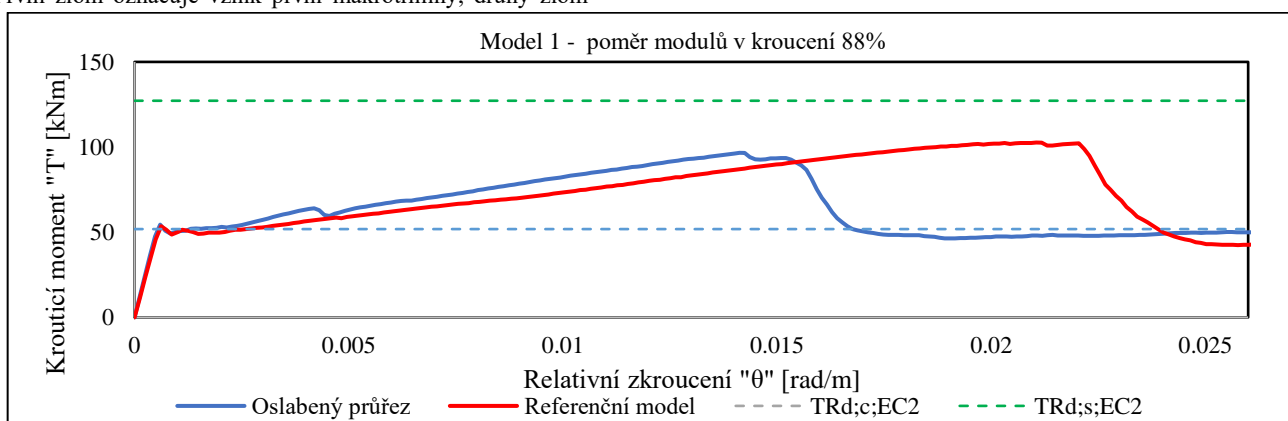
#### 3.1. Pracovní diagramy numerických modelů

Pracovní diagramy zobrazené na obr.6-9 představují vyhodnocení numerických modelů. Vyhodnocení je provedeno pomocí vykreslení závislosti relativního zkroucení na příslušném působícím krouticím momentu. Na každém diagramu jsou vykresleny dvě křivky, kde první (modrá) představuje chování oslabeného průřezu, červená vykresluje chování referenčního modelu. Dále jsou zobrazeny čárkovanou čarou předpokládané meze vzniku první trhliny a meze dosažení mezní únosnosti výztuže.

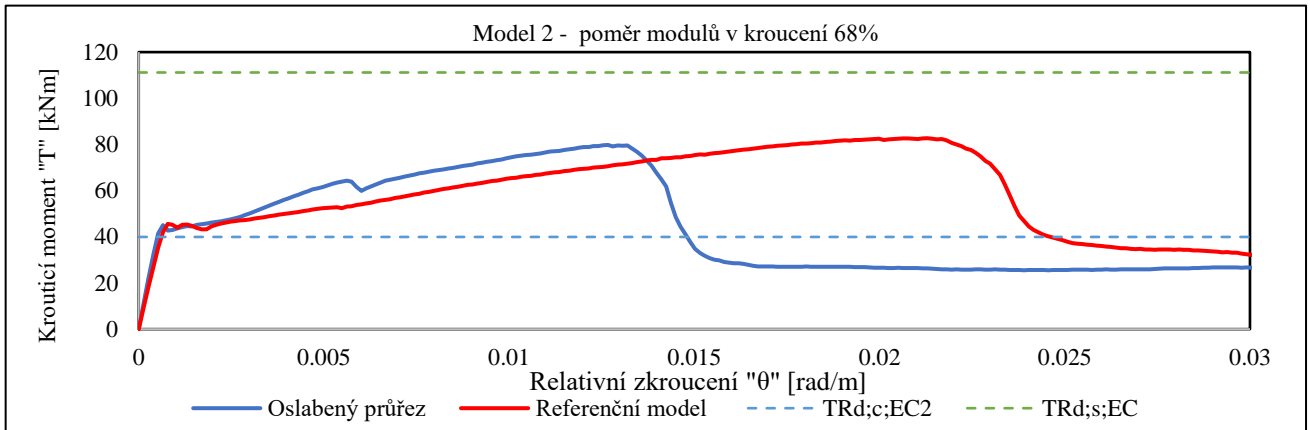
Na pracovních diagramech jsou patrné dva zlomy. První zlom označuje vznik první makrotrhliny, druhý zlom

nastává po dosažení mezního napětí ve výztuži. Posun v relativním zkroucení mezi jednotlivými modely je zapříčiněn rozdílnou tuhostí v kroucení mezi jednotlivými modely, kde má referenční model nižší tuhost po celé délce prvku, a proto dosahuje vyššího relativního zkroucení při shodném namáhání.

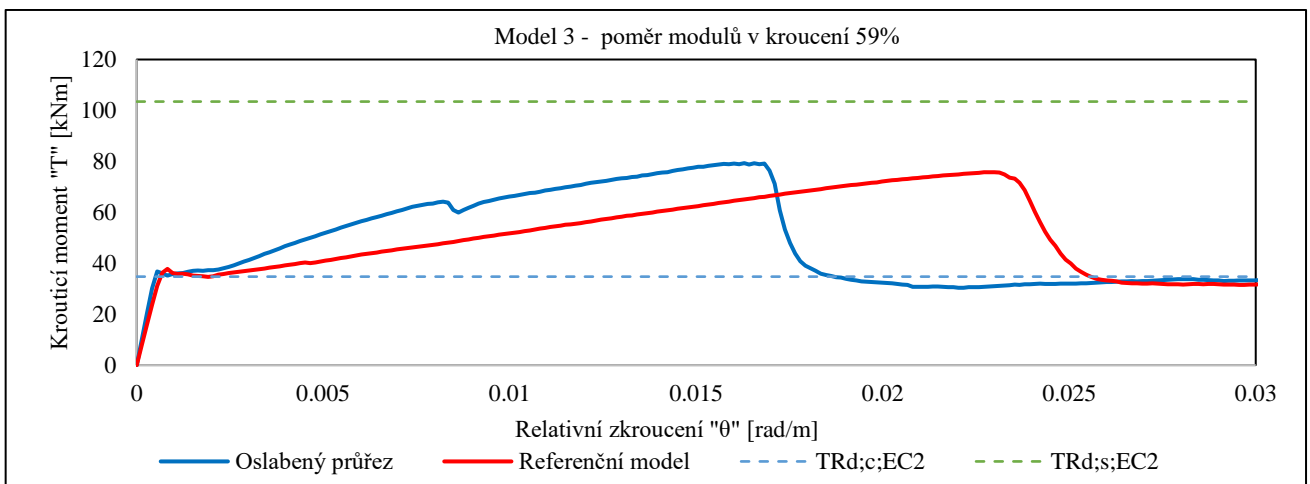
Pracovní diagramy modelů 1-3 obsahují na křivce představující oslabený průřez patrný druhý zlom, který představuje vznik první makrotrhliny v části prvku s větším průřezem



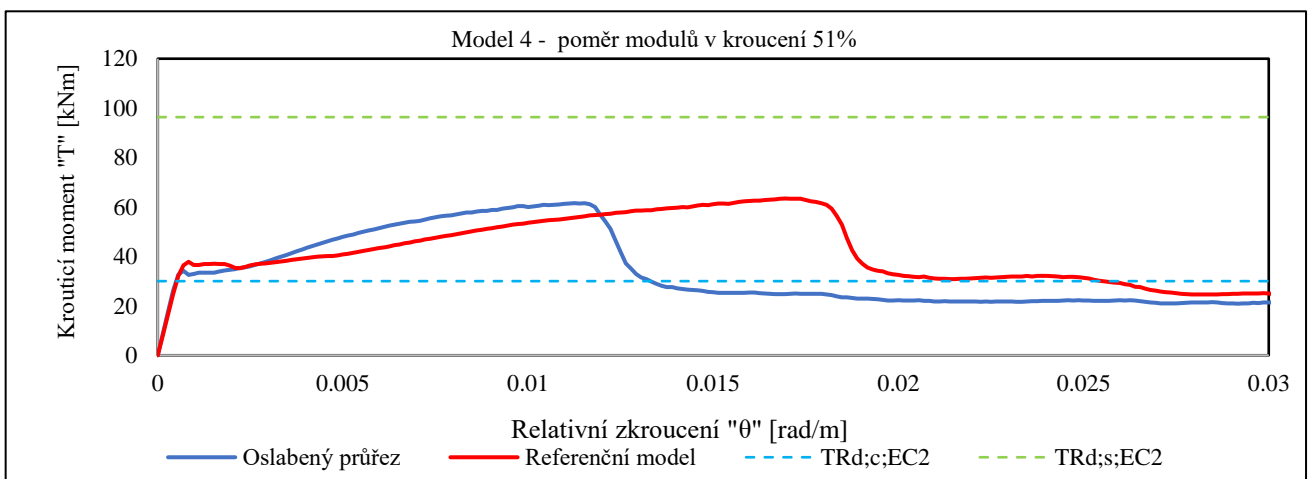
Obrázek 6 – Pracovní diagram modelu 1



Obrázek 7 – Pracovní diagram modelu 2

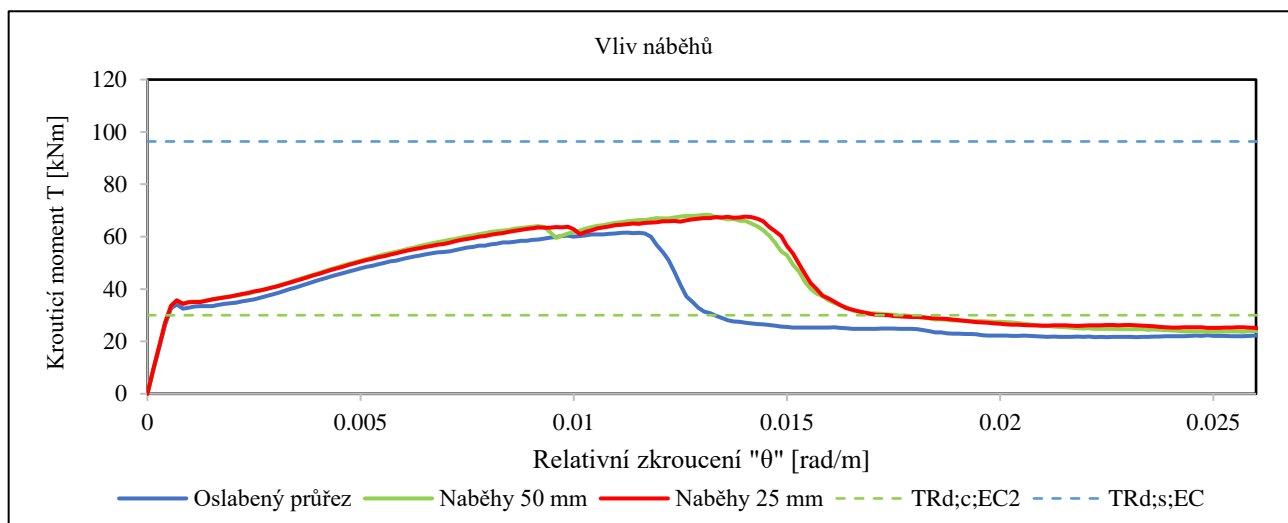


Obrázek 8 – Pracovní diagram modelu 3



Obrázek 9 – Pracovní diagram modelu 4

### 3.2. Vliv náběhů



Obrázek 10 – Vliv náběhů

Z pracovního diagramu zobrazeného v obr. 10 je patrné, že náběhy pozitivně ovlivňují chování prvku. Ovlivněna je jak hodnota krouticího momentu na vzniku první makrotrhliny, tak i celková maximální únosnost. Prvky s náběhy rovněž vykazují vyšší relativní zkroucení, což je obecně vhodné z hlediska bezpečnosti návrhu a včasného zpozorování poruchy konstrukce.

### 3.3. Vyhodnocení modelů

Zjištěné výsledky lze rozdělit do dvou základních kategorií. První kategorie zkoumá krouticí moment v okamžiku vzniku první trhliny a jeho porovnání s referenční a předpokládanými hodnotami. Druhá kategorie zkoumá krouticí moment na mezi kluzu výztuže v porovnání s únosností referenčního modelu a odhadem dle návrhového postupu.

Tabulka 2: Výsledky numerických modelů – vznik trhlin

ozn.	$T_{Rd;c;EC2}$	$T_{Rd;c;AT}$	$T_{Rd;c;ref}$	$\frac{T_{Rd;c;AT}}{T_{Rd;c;ref}}$
	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[%]
1	51,84	54,55	53,49	<b>102%</b>
2	39,93	45,00	45,57	<b>99%</b>
3	34,73	36,80	37,74	<b>98%</b>
4	30,00	32,69	37,87	<b>86%</b>

kde  $T_{Rd;c;EC2}$  je krouticí moment při vzniku trhliny stanovený dle ČSN EN 1992-1-1;

$T_{Rd;c;AT}$  krouticí moment vzniku trhliny zjištěný pomocí nelineární analýzy, model oslabený skokovou změnou geometrie;

$T_{Rd;c;ref}$  krouticí moment vzniku trhliny zjištěný pomocí nelineární analýzy, referenční model.

Tabulka 3: Výsledky numerických modelů - dosažení meze kluzu výztuže

ozn.	$T_{Rd;s;EC2}$	$T_{Rd;s;AT}$	$T_{Rd;s;ref}$	$\frac{T_{Rd;s;AT}}{T_{Rd;s;ref}}$
	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[%]
1	126,67	96,62	102,66	<b>94%</b>
2	111,17	79,79	82,69	<b>96%</b>
3	103,68	79,30	75,73	<b>105%</b>
4	96,36	61,56	63,44	<b>97%</b>

kde  $T_{Rd;s;EC2}$  je moment únosnosti stanovený dle ČSN EN 1992-1-1;

$T_{Rd;s;AT}$  krouticí moment na mezi únosnosti zjištěný pomocí nelineární analýzy, model oslabený skokovou změnou geometrie;

$T_{Rd;s;ref}$  krouticí moment na mezi únosnosti zjištěný pomocí nelineární analýzy, referenční model.

Kritický průřez pro návrh vyztužení byl vždy slabší z dvojice průřezů

## 4. DISKUZE

Tabulka 2 srovnává hodnoty zjištěných předpokládaných hodnot dle norem a zjištěných nelineární analýzou. Z porovnání oslabeného a referenčního modelu je patrné, že oslabení průřezu má vliv na krouticí moment při vzniku trhliny přibližně při rozdílu 50-60% v průřezovém modulu v kroucení. Výsledky ukazují, že stanovení momentu při vzniku trhliny pomocí postupu popsaného v ČSN EN 1992 1 1 relativně přesně odpovídají hodnotám zjištěných nelineární analýzou, při uvažování návrhových hodnot materiálových vlastností.

Tabulka 3 zobrazuje moment zjištěný nelineární analýzou s návrhovými hodnotami a porovnává je s referenčním modelem a s předpokládanou únosností uvažovanou dle

ČSN EN 1992-1-1. Předpokládané únosnosti dle normy nedosáhl žádný ze zkoumaných modelů. Vliv náhlé změny geometrie na únosnost prvků nebyl prokázán, rozdíl únosností je v mezích statistické odchylky, resp. v mezích běžné nepřesnosti numerických modelů.

Podobného výsledku, kdy prvky nedosáhnou předpokládané únosnosti dle normového výpočtu bylo dosaženo i experimentálně, např. Chalioris 2021, kde bylo na modelech sledováno, že podélné výztužné pruty nedosáhly meze kluzu.

## 5. ZÁVĚR

Krouticí moment při vzniku trhlin je ovlivněn skokovou změnou geometrie, pokud je průřez oslaben o více než 40 % z hlediska průřezového modulu ve volném kroucení  $W_t$ . Pro zkoumané prvky nebyl zjištěn vliv na únosnost průřezu na mezi kluzu výztuže.

Náběhy v místě změny průřezu mají pozitivní vliv na celkové chování kroucených prvků s náhlou změnou geometrie. Ovlivněn je moment na vzniku první makrotrhliny, kde u zkoušených modelů došlo k nárůstu o 10%. Pozitivně byl ovlivněn i mezní moment únosnosti, který dosáhl vyšších hodnot o 5%, rovněž došlo k dosažení vyšší mezní deformaci.

Při vyhodnocování výsledků bylo zjištěno, že pro čtvercové průřezy byla únosnost při dosažení meze kluzu výztuže stanovená numerickými modely nižší než předpokládaná únosnost dle ČSN EN 1992-1-1, a únosnost průřezu byla přibližně o 25 % nižší než předpoklad normy. Při podrobné analýze přetváření numerických modelů bylo pozorováno přetržení tímínek bez současného zplastizování podélné výztuže. Tím nejsou splněny předpoklady analytického modelu náhradní příhradoviny, ze kterého vychází normový postup.

Tento závěr považuje autor za závažný, neboť předběžně ukazuje na výrazné nadhodnocení únosnosti kroucených prvků při výpočtu dle normových postupů. Vzhledem k omezenému počtu modelů ale bude nezbytné tato předběžná zjištění dále podrobně zkoumat a výsledky ověřit.

### 5.1. Další výzkum

Autor článku plánuje pokračovat ve výzkumu chování průřezů vystavených kroucení. Další plánovanou oblastí výzkumu je rozšíření výpočetních modelů o další typy průřezů, analýza předjatých prvků a v neposlední řadě vlastní experimentální program k potvrzení výše uvedených výsledků numerických modelů.

## Literatura

- HSU T.T.C., Torsion of Structural Concrete—Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members. Torsion of Structural Concrete. ACI Special Publication SP-18; 1968, Farmington Hills, Mich
- LEONHARDT F, SCHELLING G. Torsionsversuche an Stahlbetonbalken. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb) 1974, Heft 239, W. Ernst u. Sons, Berlin

CHALIORIS C.E.; Application of Special Reinforcement Arrangements for RC Members under Torsion - Design Examples; ACI SP-344; January 2021

TIMOSHENKO S. P., GOODIER J. N.; Theory of Elasticity; 2nd edition; New York:McGraw-Hill, 1951; Engineering societies monographs

ČSN EN 1992-1-1 ed. 2; Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby; Praha: ÚNMZ, červenec 2011