

# KROUCENÉ ŽELEZOBETONOVÉ PRVKY: CITLIVOSTNÍ ANALÝZA NELINEÁRNÍCH NUMERICKÝCH MODELŮ

Jan Vesecký, \*

Katedra betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební,  
České vysoké učení technické v Praze, Thákurova 7/2077, 166 29 Praha 6, Česká republika.  
jan.vesecky@fsv.cvut.cz

## ABSTRAKT

Simulace experimentů pomocí nelineárních numerických modelů se postupně stala nedílnou součástí vědecké práce a stále častěji se také začíná uplatňovat v praxi při návrhu složitých konstrukcí.

Výhodou a zároveň nevýhodou těchto modelů je možnost a zároveň nutnost zadání velkého množství vstupních parametrů, především materiálových vlastností. Některé z nich je mnohdy náročné nebo téměř nemožné stanovit, což vede k potenciálně nepřesným odhadům pomocí empirických vztahů. U železobetonových konstrukcí se jedná například o pevnost v dostředném tahu, lomovou energii, směr šíření trhlin, tvar plochy plasticity, míru zpevnění/změkčení aj.

V předloženém článku je na modelu masivního krouceného železobetonového prvku, vytvořeného v prostředí programu ATENA Science, ukázán vliv výše uvedených parametrů na vznik trhlin, únosnost a celkový tvar pracovního diagramu.

## KLÍČOVÁ SLOVA

Kroucení • Masivní průřez • Železobetonové prvky • Nelineární numerické modely • Vliv vstupních parametrů • ATENA Science

## ABSTRACT

Nonlinear numerical simulation of experimental results has gradually become an integral part of the scientific work. It is also more increasingly used in the practical design of complex structures.

The advantage and disadvantage of these models at the same time is the possibility as well as the necessity to input a large number of parameters, especially material properties. Some of them are usually difficult or even almost impossible to determine, which leads to a potentially inaccurate estimate by empirical formulas. In the case of reinforced concrete structures, these are, for example: axial tensile strength, fracture energy, direction of crack propagation, plasticity model, strain hardening/softening, etc.

This paper shows the influence of these parameters on the crack initiation, load capacity, and overall stress-strain behavior of the massive reinforced concrete member under torsion, using the nonlinear FEM software ATENA Science.

## KEYWORDS

Torsion • Massive cross-section • Reinforced concrete members • Nonlinear numerical models • Influence of input parameters • ATENA Science

## 1. ÚVOD

Cílem experimentální analýzy často nebývá pouze zjištění reálného chování konstrukcí (případně dílčích konstrukčních prvků), ale především získání vstupních dat pro následnou numerickou analýzu. Numerické modely musí nejprve projít procesem validace, který ověří, že numerické výsledky odpovídají výsledkům původního experimentu (s přijatelnou mírou odchylky). Až následně je možné využití plného potenciálu numerické simulace a výsledky nákladného experimentu rozšířit o výrazně levnější a zpravidla rychlejší numerické výsledky. Touto tzv. parametrickou studií je možné ověřit stovky nebo tisíce modifikovaných uspořádání původního experimentu.

Zcela nezbytnou podmínkou úspěšné validace numerického modelu je ovšem znalost všech podstatných materiálových vlastností. Těch přitom může být velké množství, a to zvláště v případě (železo)betonových konstrukcí a prvků, neboť se jedná o nehomogenní a kompozitní materiál, vyznačující se výrazně nelineárním chováním.

Pro věrohodnou a dostatečně přesnou numerickou simulaci takového materiálu je zapotřebí použít velice pokročilé numerické modely, které umožňují zohlednit obecný pracovní diagram betonu, poškození trhlinami v tahu a drceniím v tlaku, pružnoplastické chování výztuže a v neposlední řadě vzájemné spolupůsobení (soudržnost) těchto dvou materiálů. Tyto modely jsou analyzovány iteračně se stovkami až tisíci zatěžovacími kroky, při kterých je neustále přepočítávána tuhost celé konstrukce, aktualizován pružnoplastický stav každého konečného prvku a sledován postupný rozvoj trhlin.

Jedním z nemnoha programů, který umožňuje provést takovou analýzu je ATENA Science v. 5.7.0 (Červenka et al., 2018), jež byla použita pro získání všech numerických výsledků uvedených v tomto článku

Pro analýzu byl zvolen krátký železobetonový nosník obdélníkového průřezu namáhaný kroucením. Hlavním cílem článku je stanovení míry vlivu různých materiálových vlastností na výsledné chování tohoto nosníku, se zaměřením

\* Školitel: doc. Ing. Lukáš Vráblík, Ph.D., FEng.

na únosnost při vzniku trhlin a únosnost při zplastizování výztuže.

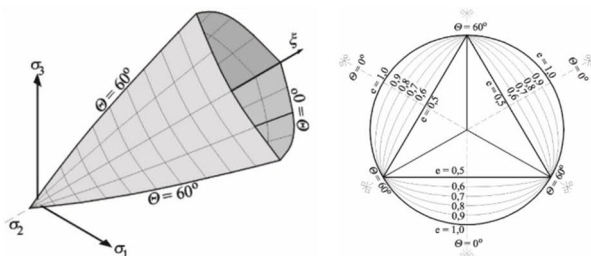
Vzhledem k namáhání kroucením jsou výsledky relevantní především pro železobetonové prvky s převládajícím smykovým napětím. Článek se nezabývá problematikou správné volby velikosti a typu konečných prvků a dalších témat souvisejících s nelineární numerickou analýzou, ačkoliv i tyto parametry ovlivňují výsledné chování modelu.

## 2. MATERIÁLOVÉ PARAMETRY

### 2.1. Beton

V programu ATENA Science je beton modelován pomocí materiálového prototypu *CC3DNonLinCementitious2*, který umožňuje simulovat trojsové plastické poškození cementových kompozitů. Formulace materiálového modelu vychází z rozkladu tenzoru přetvoření  $\varepsilon$  do složek pružného přetvoření  $\varepsilon^e$ , plastického přetvoření  $\varepsilon^p$  a lomového přetvoření  $\varepsilon^f$  dle de Borsta (1986).

Podmínka plasticity je smíšená, s rozdílnými kritérii pro tah a tlak. Při tahovém namáhání je vznik trhlin podmíněn Rankinovou podmínkou plasticity, tedy speciálním případem Mohr-Coulombovy podmínky pro úhel vnitřního tření  $\phi = 90^\circ$ , viz Coulomb (1776), Mohr (1900) a Paul (1968). Při tlakovém namáhání je drcení betonu podmíněno Menétrey-Willamovou podmínkou plasticity, jejíž tvar je řízen parametrem excentricity  $e$ . V deviatorické rovině (tj. v řezu kolmo na hydrostatickou osu) nabývá podmínka tvaru rovnostranného trojúhelníku pro  $e = 0,5$  a tvaru kružnice pro  $e = 1,0$ , viz Menétrey & Willam (1995). Doporučená hodnota excentricity pro beton je  $e = 0,52$ .



Obrázek 1: Menétrey-Willamova plocha plasticity – axonometrické zobrazení v Haigh-Westergaardově prostoru a deviatorické řezy pro různé hodnoty excentricity  $e$ , převzato a upraveno z Jásiňski (2017).

K dostatečnému popisu tohoto materiálového modelu je třeba definovat celkem 21 parametrů, zahrnujících mj. mechanické a přetvárné vlastnosti, změnu chování při poškození nebo tvar funkce plasticity  $f$  a plastického potenciálu  $g$ . Mnoho z těchto parametrů není zpravidla přesně známo, a proto jsou odhadovány pomocí empirických vztahů.

Tyto empirické vztahy mohou být mnohdy poměrně výrazně vzdáleny od skutečnosti. Proto bylo vybráno 6 klíčových parametrů, u kterých byl předpokládán možný vliv na chování modelu krouceného železobetonového prvku:

- pevnost betonu v dostředném tahu ( $f_{ct}$  [MPa]);
- Youngův modul pružnosti betonu ( $E_c$  [GPa]);
- lomová energie ( $G_f$  [N/m]);

- maximální velikost kameniva ( $d_{max}$  [mm]);
- koeficient fixace trhlin ( $c_{fc}$  [-]);
- a koeficient tahového zpevnění ( $c_{ts}$  [-]);

Vzhledem k obecně známému velkému rozptylu materiálových vlastností betonu, byl zkoumán vliv změny jednotlivých parametrů od hodnoty  $0,5 \cdot X_{ref}$  do  $1,5 \cdot X_{ref}$ , kde  $X_{ref}$  je referenční (výchozí) hodnota daného parametru. V případě koeficientů definovaných na intervalu  $<0;1>$  byl prohledán celý interval a v případě velikosti kameniva byly ověřeny nejčastěji používané frakce kameniva.

Přesné hodnoty uvažované ve studii citlivosti jsou uvedeny dále, v kapitole 5.2.

### 2.2. Betonářská ocel

Prutová výztuž je modelována pomocí materiálového prototypu *CCReinforcement*, který simuluje jednoosé pružnoplastické chování.

Pracovní diagram je multilineární s počáteční pružnou větví a následně až šesti dalšími větvemi popisujícími plastické chování.

K popisu tohoto materiálového modelu je třeba definovat 4 základní parametry a dále 1 až 6 dvojic napětí-přetvoření, popisujících plastickou část pracovního diagramu. Předpokládá se, že při dosažení maximálního definovaného napětí dojde k přetržení výztuže.

Pro zkoumání vlivu na únosnost krouceného železobetonového prvku byly vybrány 2 parametry:

- mez kluzu výztuže ( $f_{sy}$  [MPa]);
- Youngův modul pružnosti výztuže ( $E_s$  [GPa]).

Rozptyl materiálových vlastností oceli je zpravidla relativně malý, proto byl zkoumán vliv uvedených parametrů v intervalu od  $0,7 \cdot X_{ref}$  do  $1,3 \cdot X_{ref}$ .

Přesné hodnoty uvažované ve studii citlivosti jsou uvedeny dále, v kapitole 5.2.

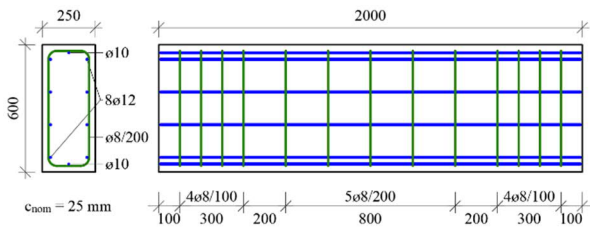
## 3. VALIDAČNÍ MODEL

### 3.1. Experimentální výsledky

Validace numerického modelu byla provedena na experimentálních výsledcích série zatěžovacích zkoušek uspořádaných Kloknerovým ústavem v letech 2019 a 2020, viz Čítek et al. (2020) a Vítek et al. (2020). Autoři experimentu poskytli autorovi článku veškerá potřebná data k dalšímu využití.

V rámci experimentálního programu bylo zkoumáno chování 24 těles při namáhání kroucením. Všechna tělesa představovala krátký železobetonový nosník délky 2 m s obdélníkovým průřezem 250×600 mm ve čtyřech sadách (A až D) s různým množstvím podélné a příčné výztuže. Polovina těles z každé sady byla zkoušena za čistého kroucení, druhá polovina za kombinace kroucení a tlakové normálové síly.

Výchozím tělesem pro validaci byl zvolen nosník s označením D1, vyztužený tříminky Ø8/200 mm (se zahuštěním na koncích), osmi podélnými pruty Ø12 mm a dvěma podélnými pruty Ø10 mm., viz Obrázek 2.



Obrázek 2: Dimenze a vyztužení experimentálního tělesa D1.

Tento nosník byl během experimentu zatěžován čistým kroucením, přičemž oba konce byly opatřeny ocelovou roznášecí deskou tvaru U, bránící volné deplanaci. Zatěžování bylo řízeno předepsanými posuny, vyvozenými dvěma protisměrnými mimoběžnými zatěžovacími válci na jednom konci nosníku. Druhý konec nosníku byl vetknutý, a tedy průběh vnitřního krouticího momentu po délce nosníku byl konstantní.

### 3.2. Numerický validační model

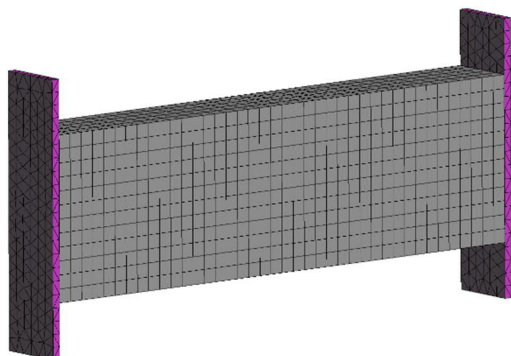
Geometrie a vyztužení numerického validačního modelu byly provedeny v souladu s experimentálním tělesem D1. Konce byly opatřeny zatěžovacími deskami tl. 30 mm bránícími deplanaci. Tyto desky byly modelovány z fiktivního, téměř dokonale tuhého materiálu s modulem pružnosti  $E = 1000$  GPa. Délka desek byla zvolena záměrně 1,0 m tak, aby odečtené reakce svou číselnou hodnotou přímo odpovídaly číselné hodnotě krouticího momentu.

Základní materiálové vlastnosti betonu a betonářské oceli byly v souladu s experimentem stanoveny následovně:

- pevnost betonu v tlaku:  $f_c = 48$  MPa;
- pevnost betonu v tahu:  $f_{ct} = 3,7$  MPa;
- modul pružnosti betonu:  $E_c = 30$  GPa;
- mez kluzu výztuže:  $f_{sy} = 630$  MPa.

Ostatní materiálové parametry byly ponechány jako výchozí, dle empirických vztahů odpovídajících středním hodnotám pro pevnostní třídu betonu C40/50 (dle ČSN EN 206+A1:2017) a pevnostní třídu betonářské oceli B500B (dle ČSN EN 10080:2005).

Pro aproximaci řešení byl betonový nosník pokryt prostorových osmistěnných konečných prvků s lineární aproximací pole posunutí, viz Obrázek 3. Po délce nosníku bylo provedeno dělení na 40 prvků, ve směru delší strany průřezu na 12 prvků a ve směru kratší strany průřezu na 5 prvků, tedy celkem 2400 prvků tvaru krychle  $50 \times 50 \times 50$  mm, výztuž byla aproximována lineárními prutovými prvky tah-tlak a zatěžovací desky lineárními prostorovými čtyřstěny průměrné velikosti 50 mm.



Obrázek 3: Numerický model – síť konečných prvků.

Zatěžování bylo řízeno předepsanými protisměrnými posuny obou konců jedné ze zatěžovacích desek. Celkový posun konce desky o 30 mm byl rozdělen do 300 zatěžovacích kroků po 0,1 mm. V každém zatěžovacím kroku bylo provedeno až 30 iterací a v případě nedostatečné konvergence byl zatěžovací krok zopakován s poloviční hodnotou posunu. Pro hledání rovnováhy nelineárního systému byla použita plná Newton-Raphsonova metoda s přepočtem matice tuhosti v každém iteračním kroku.

### 3.3. Výsledky validace

Hlavními sledovanými parametry validace byly hodnoty krouticího momentu při vzniku trhlin a při dosažení meze kluzu výztuže a dále celkový tvar pracovního diagramu zobrazujícího závislost krouticího momentu  $T$  na průměrném zkroucení  $\theta_{avg}$ . Tyto dvě veličiny byly stanoveny následovně:

$$T_t = R_{1,t} \cdot \frac{r}{2} + R_{2,t} \cdot \frac{r}{2} \quad (1)$$

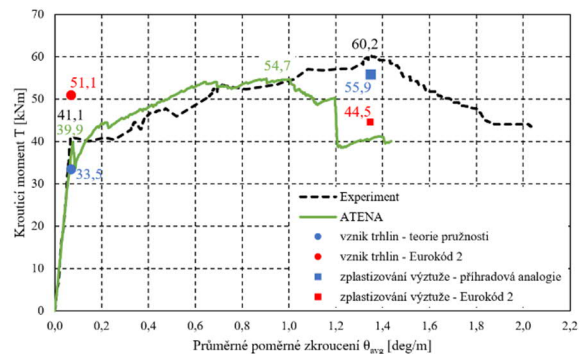
$$\theta_{avg,t} = \frac{\varphi(L)_t}{L} \quad (2)$$

kde  $T_t$  je krouticí moment v zatěžovacím kroku  $t$   
 $R_{i,t}$   $i$ -tá reakce v zatěžovacím kroku  $t$   
 $r$  rameno sil ( $r = 1,0$  m)  
 $\varphi(L)_t$  pootočení průřezu podél osy  $x$  na zatěžovaném konci nosníku v zatěžovacím kroku  $t$   
 $L$  délka nosníku ( $L = 2$  m)

Pro snazší orientaci ve výsledcích jsou nadále hodnoty průměrného poměrného zkroucení uváděny v jednotkách [deg/m] přestože je zvykem je častěji uvádět v jednotkách [rad/m].

Numerickou analýzou byl stanoven krouticí moment při vzniku trhlin  $T_{c,num} = 39,9$  kNm a krouticí moment v okamžiku zplastizování výztuže  $T_{s,num} = 54,7$  kNm. Experimentálně byly na tělese D1 změřeny hodnoty  $T_{c,exp} = 41,1$  kNm a  $T_{s,exp} = 60,2$  kNm. Rozdíl numerických a experimentálních hodnot tedy byl -3% resp. -9%.

Pracovní diagamy numerické a experimentální analýzy jsou porovnány níže, viz Obrázek 4. Pro porovnání jsou uvedeny i předpokládané hodnoty dle analytických výpočtů.



Obrázek 4: Experimentální a validační numerický model – pracovní diagram  $T-\theta_{avg}$ .

Z pracovního diagramu je patrný dobrý soulad naměřených tuhostí jak před vznikem trhlin (počáteční lineární větve), tak po jejich vzniku. Jediným znatelným rozdílem je

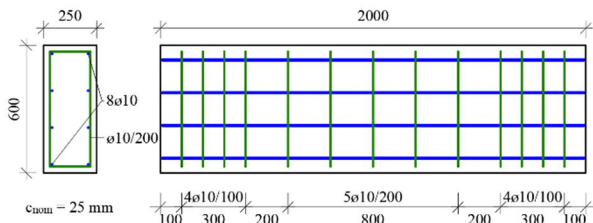
dosažení únosnosti při nižším poměrném zkroucení v případě numerického modelu. Tento nesoulad může být způsoben jednak nepřesnostmi měření v průběhu experimentu a zároveň jiným rozmístěním a počtem trhlin, tedy skutečnostmi, které téměř nelze ovlivnit.

Jelikož je hlavním cílem navazující studie citlivosti především stanovení správných hodnot krouticího momentu při vzniku trhlin a v okamžiku zplastizování výztuže, považuje autor článku, vzhledem k výše uvedenému, validaci za úspěšnou.

#### 4. REFERENČNÍ MODEL

Před samotnou studií citlivosti byl připraven referenční model, vycházející z výše popsaného validačního modelu, s drobnými úpravami za účelem zjednodušení analýzy a interpretaci výsledků:

- byly odstraněny dva podélné pruty uprostřed kratších stran průřezu, viz Obrázek 5;
- veškeré pruty podélné i příčné výztuže byly sjednoceny na  $\varnothing 10$  mm, viz Obrázek 5;
- veškeré výchozí materiálové parametry byly stanoveny dle empirických vzorců, viz dále;
- geometrie modelu byla plně zachována;
- uspořádání výztuže bylo s výše uvedenou výjimkou zachováno.



Obrázek 5: Dimenze a vyztužení referenčního modelu.

##### 4.1. Vstupní parametry výpočtu

Jako výchozí materiály byly zvoleny beton C40/50 a betonářská ocel B500B, a to v souladu s ČSN EN 206+A1:2017, ČSN EN1992-1-1:2019 a ČSN EN 10080:2005.

Jednotlivé materiálové parametry byly pro referenční model stanoveny jako střední hodnoty vypočtené dle empirických vztahů uvedených ve výše uvedených normách (pro základní parametry), resp. dle odborné literatury (pro pokročilé parametry). Níže jsou shrnuty hodnoty těchto parametrů, jejichž vliv je následně zkoumán v rámci studie citlivosti, případně parametrů souvisejících (ty jsou odlišeny hvězdičkou):

- $f_{ck} = 40$  MPa\*;
- $f_{cm} = f_{ck} + 8 = 48$  MPa\*;
- $f_{ct} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 3,50$  MPa;
- $E_c = 22 \cdot (f_{cm}/10)^{0,3} = 35$  GPa;
- $G_f = 25 \cdot f_{ct} = 87,5$  N/m
- $d_{max} = 22$  mm (upraveno z výchozí hodnoty 20 mm);
- $c_{fc} = 1,00$  (fixní trhliny);
- $c_{ts} = 0,00$  (bez tahového zpevnění);
- $f_{sy} = 550$  MPa;
- $E_s = 200$  GPa.

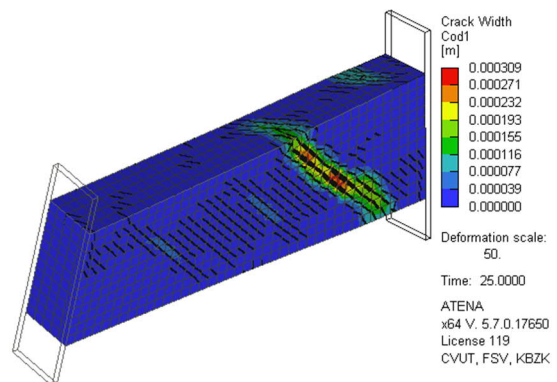
Ostatní parametry výpočtu jako typ a velikost konečných prvků, typ nelineárního řešiče, počet a velikost zatěžovacích kroků apod. byly zachovány z validačního modelu, viz výše. Jedinou změnou bylo nastavení možnosti až čtyřnásobného opakování zatěžovacího kroku v případě nedostatečné konvergence, a to se součiniteli délky kroku postupně 0,5 – 0,1 – 0,05 a 0,01.

##### 4.2. Výsledky

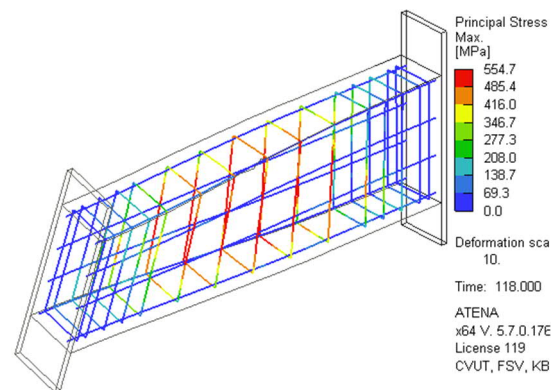
Analýzou referenčního modelu (viz Obrázek 6 a Obrázek 7) byl stanoven výchozí průběh pracovního diagramu a hodnoty krouticího momentu v rozhodujících okamžicích zatěžování:

- $T_c = 40,9$  kNm při  $\theta_{avg} = 0,069$  deg/m
- $T_s = 77,3$  kNm při  $\theta_{avg} = 0,939$  deg/m

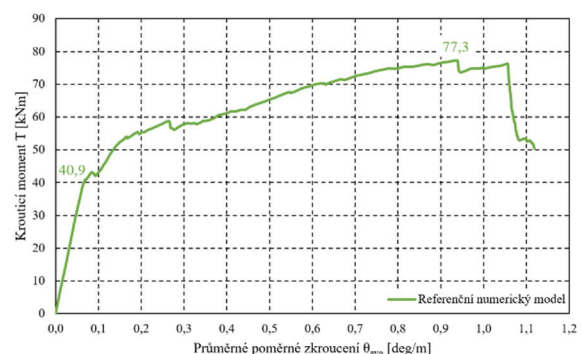
Referenční pracovní diagram ukazuje Obrázek 8.



Obrázek 6: Referenční numerický model po lokalizaci první smykové makrotrhliny – šířka primárních trhlin.



Obrázek 7: Referenční numerický model – napětí ve výztuži po dosažení maximální únosnosti modelu.



Obrázek 8: Referenční numerický model – pracovní diagram.

## 5. STUDIE CITLIVOSTI

Studie citlivosti byla provedena na modelech vycházejících z referenčního modelu popsaného v předchozí kapitole. Celkem bylo analyzováno 47 modelů pro 8 různých materiálových parametrů.

### 5.1. Zdůvodnění výběru některých materiálových parametrů

Pro studii citlivosti byly vybrány parametry uvedené v kapitole 2. Bez nutnosti vysvětlení je zřejmý výběr materiálových charakteristik popisujících pevnost a tuhost materiálu. Méně zřejmá ovšem může být volba dalších parametrů jako lomová energie, maximální velikost kameniva, koeficient fixace trhlin a koeficient tahového zpevnění. Tyto parametry jsou proto dále podrobněji popsány.

#### Lomová energie

Lomová energie  $G_f$  [N/m] zjednodušeně vyjadřuje míru odporu trhliny proti jejímu dalšímu šíření. Při vyšších hodnotách lomové energie je třeba vynaložit větší množství mechanické práce, aby došlo k rozvoji trhlin a naopak při nízkých hodnotách lomové energie se trhliny šíří téměř samovolně. Jelikož při namáhání kroucením dochází ke vzniku trhlin po celém obvodu průřezu, může hodnota lomové energie výrazně ovlivnit chování takto namáhaného prvku.

#### Maximální velikost kameniva

Maximální velikost kameniva  $d_{max}$  [mm] podle modifikované teorie kompresního pole (Vecchio & Collins, 1986) ovlivňuje smykovou únosnost betonu po vzniku trhlin, neboť bylo experimentálně zjištěno, že hrubý povrch trhliny dokáže v omezené míře přenášet smyková napětí (tzv. *aggregate interlock effect*). Tato smyková pevnost je mj. úměrná maximální velikosti kameniva dle vztahu:

$$f_{v,max} = 0,18 \cdot \frac{\sqrt{f_c}}{0,31 + \frac{2+w_c}{d_{max}+16}} \quad (3)$$

kde  $w_c$  je šířka trhliny.

#### Koeficient fixace trhlin

Koeficient fixace trhlin  $c_{fc}$  [-] vychází z teorie lomové mechaniky a popisuje jakým směrem se bude trhlina šířit (k šíření dochází pokud je v daném objemu poškozeného materiálu dostatek energie rovné lomové energii, viz výše).

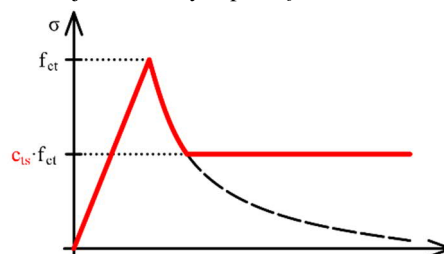
Při hodnotě  $c_{fc} = 1,00$  jsou trhliny tzv. plně fixní a šíří se výhradně v původním směru trhliny, bez ohledu na vývoj napjatosti v okolí jejího kořene.

Při hodnotě  $c_{fc} = 0,00$  jsou trhliny tzv. plně rotované a šíří se vždy ve směru aktuálního hlavního tahového napětí v okolí kořene trhliny.

Mezilehlé hodnoty určují, při jaké hodnotě poklesu tahové pevnosti vlivem změkčení (závislého na velikosti trhliny) dojde ke změně z rotovaných trhlin na fixní trhliny. Např. při hodnotě  $c_{fc} = 0,50$  dojde k fixaci trhlin pokud tahová pevnost poklesne pod 50 % původní hodnoty pevnosti neporušeného betonu.

#### Koeficient tahového zpevnění

Koeficient tahového zpevnění  $c_{ts}$  [-] popisuje míru příspěvku taženého betonu k tuhosti výztuže po vzniku trhlin, viz Obrázek 9. Např. hodnota  $c_{ts} = 0,5$  udává, že nemůže dojít k poklesu tahové pevnosti pod 50 % původní hodnoty ani po vzniku trhlin v betonu. Tento jev byl pozorován u výrazně vyztužených železobetonových prvků a doporučené hodnoty koeficientu  $c_{ts}$  jsou uvedeny např. ve *fib Model Code 2010*.



Obrázek 9: Význam koeficientu tahového zpevnění  $c_{ts}$ .

### 5.2. Hodnoty sledovaných materiálových parametrů

Tabulka 1 shrnuje uvažované hodnoty parametrů sledovaných v rámci studie citlivosti. Hodnoty byly obecně voleny v intervalu -50 % až +50 % od referenční hodnoty pro beton, -30 % až +30 % od referenční hodnoty pro betonářskou ocel a v celém intervalu 0 až 1 v případě koeficientů.

Tabulka 1: Hodnoty parametrů pro studii citlivosti (referenční hodnoty vyznačeny tučným písmem).

Vel.	Jedn.	1	2	3	4	5	6	7
$f_{ct}$	MPa	1,75	2,45	3,15	<b>3,50</b>	3,85	4,55	5,25
$E_c$	GPa	17,5	24,5	31,5	<b>35,0</b>	38,5	45,5	52,5
$G_f$	N/m	43,8	61,3	78,8	<b>87,5</b>	96,3	114	131
$d_{max}$	mm	4	8	16	<b>22</b>	32	-	-
$c_{fc}$	-	0,01	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90	<b>1,00</b>
$c_{ts}$	-	<b>0,00</b>	0,01	0,10	0,25	0,50	0,75	1,00
$f_{sy}$	MPa	140	160	180	<b>200</b>	220	240	260
$E_s$	GPa	385	440	495	<b>550</b>	605	660	715

V rámci studie byl vždy zkoumán vliv změny jediného parametru, nikdy nebyl kombinován vliv změny více parametrů. Dvěma výjimkami byly materiálové vlastnosti závislé na výše uvedených parametrech. Vždy tedy byly dodrženy následující poměry veličin:

$$\frac{|f_{c0}|}{f_{ct}} \geq 2,1 \quad (4)$$

$$\frac{f_{su}}{f_{sy}} = 1,08 \quad (5)$$

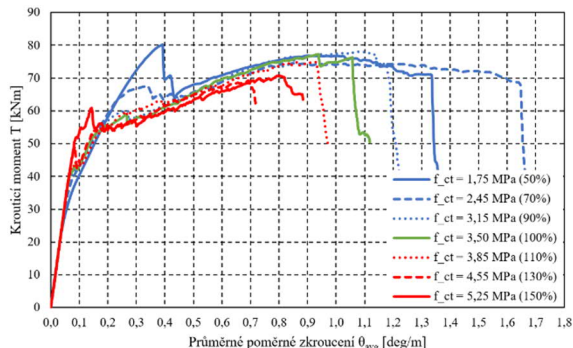
kde  $f_{c0}$  tlakové napětí na počátku drcení betonu  
 $f_{su}$  mez pevnosti výztuže

### 5.3. Pracovní diagramy

Následující obrázky zobrazují vliv jednotlivých materiálových parametrů na celkový průběh pracovního diagramu  $T-\theta_{avg}$ .

Obrázek 10 je věnován vlivu tahové pevnosti betonu. Dle očekávání dochází mnohem dříve ke vzniku trhlin u modelů s nižší tahovou pevností (viz okamžik výrazného poklesu tuhosti počáteční větve diagramu). Zároveň u modelů s nižší

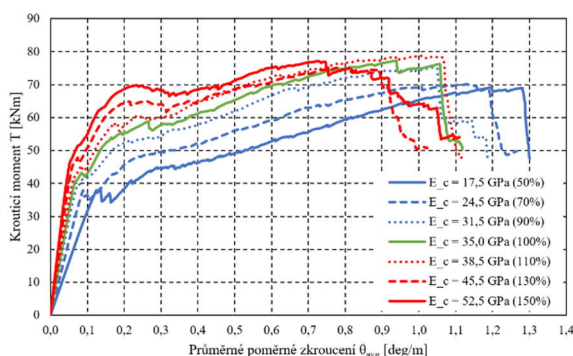
pevností dochází později ke zplastizování výztuže (viz vrchol pracovního diagramu). Překvapivým výsledkem je dosažení nejvyšší celkové únosnosti pro modely s nejnižší tahovou pevností betonu, a naopak nejnižší celkové únosnosti pro modely s vysokou tahovou pevností.



Obrázek 10: Vliv tahové pevnosti betonu – pracovní diagramy.

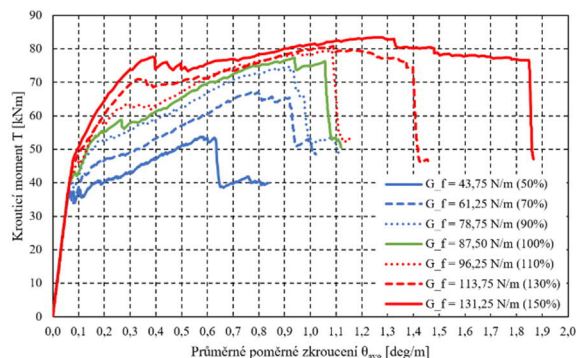
Atypické chování bylo pozorováno u modelu s tahovou pevností 1,75 MPa, který po vzniku trhlin vykázal pouze malý pokles tuhosti. Toto chování lze vysvětlit pozorováním rozvoje trhlin. Zatímco při běžném chování dochází po vzniku trhlin k rozvoji jedné (nebo nejvýše dvou) makrotrhlin, v případě modelu s pevností 1,75 MPa došlo k rovnoměrnému popraskání tělesa defacto v celé jeho ploše a až po dosažení maximální únosnosti došlo k lokalizaci jedné makrotrhliny a plnému aktivování výztuže, která byla předtím využita pouze přibližně ze 30 %. V tomto případě tedy maximální únosnost neodpovídá okamžiku zplastizování výztuže.

Obrázek 11 popisuje vliv modulu pružnosti betonu. Z grafu je zcela zřejmé rozlišení jednotlivých zkoumaných hodnot, kdy nižší modul pružnosti vede na nižší tuhost před i po vzniku trhlin a rovněž nižší únosnost jak v okamžiku vzniku trhlin, tak při zplastizování výztuže.



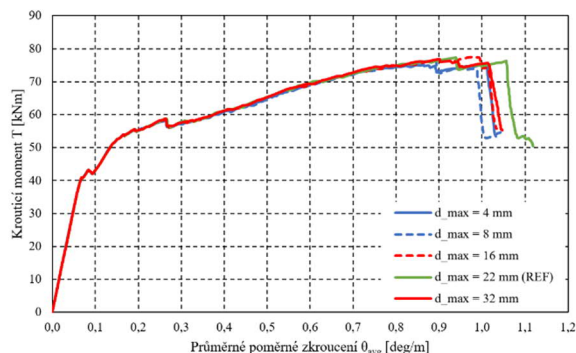
Obrázek 11: Vliv modulu pružnosti betonu – pracovní diagramy.

Obrázek 12 zobrazuje vliv lomové energie. Z hlediska únosnosti je její efekt podobný jako výše popsany efekt modulu pružnosti betonu. Vyšší hodnoty lomové energie vedou k vyšší únosnosti při vzniku trhlin i při zplastizování výztuže. Tuhost je ovšem ovlivněna pouze zanedbatelně a pro nižší hodnoty lomové energie dochází ke kolapsu při mnohem nižších hodnotách poměrného zkroutěním.



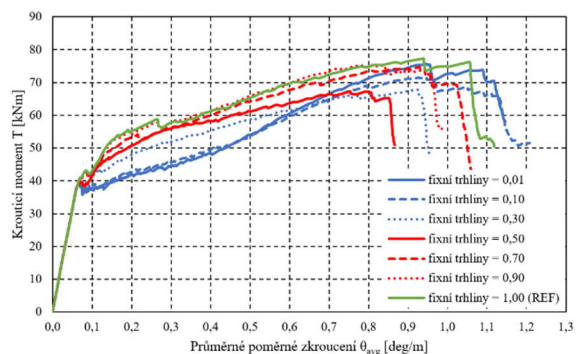
Obrázek 12: Vliv lomové energie betonu – pracovní diagramy.

Vliv maximální velikost kameniva ukazuje Obrázek 13. Na rozdíl od předchozích grafů má kamenivo (resp. smyková pevnost po vzniku trhlin, viz vztah (3)) zanedbatelný vliv na chování prvku. Je pozorován pouze malý vliv na hodnotu poměrného zkroutěním při dosažení meze kluzu výztuže.



Obrázek 13: Vliv maximální velikosti kameniva – pracovní diagramy.

Směr šíření trhlin, který zobrazuje Obrázek 14 nemá prakticky žádný významný vliv na únosnost při vzniku trhlin ani při zplastizování výztuže. Je ovšem pozorováno výrazné rozdílné chování krátce po vzniku trhlin, kdy model s fixními trhlinami ( $c_{fc} = 1,00$ ) poměrně výrazně zpevňuje, zatímco u modelu s téměř plně rotovanými trhlinami ( $c_{fc} = 0,01$ ) je patrné drobné změkčení a až následně pozvolný nárůst tuhosti.



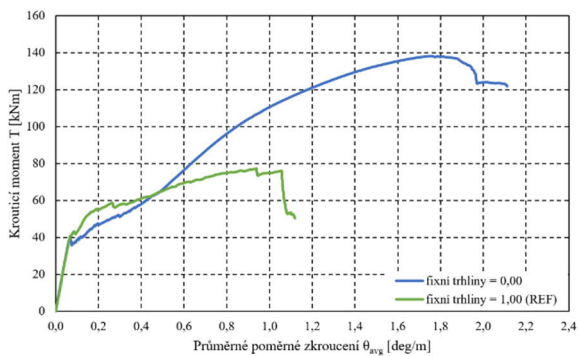
Obrázek 14: Vliv směru šíření trhlin – pracovní diagramy.

Z výše uvedeného grafu bylo cíleně vynecháno chování modelu s plně rotovanými trhlinami ( $c_{fc} = 0,00$ ), tzn. že za žádných okolností nedojde k fixaci šíření trhlin, ani pokud klesne

tahová pevnost vlivem poškozeno na 0 MPa. Značný rozpor mezi chováním s plně rotovanými a fixními trhlinami ukazuje Obrázek 15.

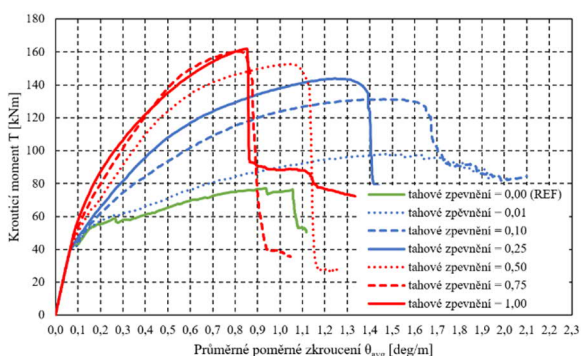
Autorovi článku se dosud nepodařilo dostatečně vysvětlit tento fenomén, ovšem velmi pravděpodobně souvisí s následujícím pozorováním:

- Po vzniku první makrotrhliny nedošlo ke vzniku dalších makrotrhlin v jiných částech nosníku jako u všech ostatních modelů. „Pás“ této jediné makrotrhliny se naopak začal postupně rozšiřovat až do okamžiku, kdy jeho šířka odpovídala téměř celé délce nosníku.
- Nikdy nebylo zaznamenáno drčení rohů průřezu po zplastizování výztuže, na rozdíl od všech ostatních modelů, u kterých bylo toto chování vždy zjištěno.



Obrázek 15: Vliv směru šíření trhlin – výrazný rozpor mezi plně rotovanými a fixními trhlinami.

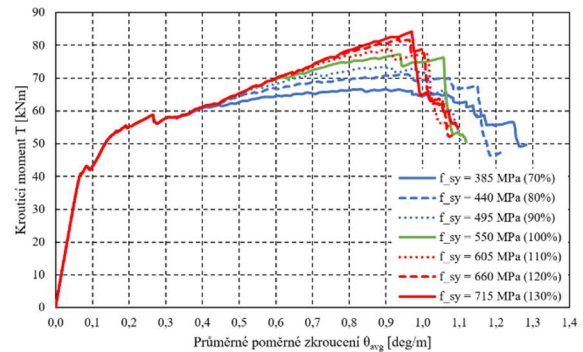
Obrázek 16 ukazuje vliv tahového zpevnění betonu. Zcela zřejmá je výrazná změna chování po vzniku trhlin, a to i pro velmi nízké hodnoty koeficientu  $c_{ts} = 0,01$  nebo  $c_{ts} = 0,10$ . Únosnost při dosažení meze kluzu velmi rychle narůstá a celkové chování neodpovídá běžným pozorováním při experimentálním zkoumání kroucených železobetonových prvků.



Obrázek 16: Vliv tahového zpevnění betonu – pracovní diagramy.

Vliv meze kluzu výztuže ukazuje Obrázek 17. Dle očekávání výztuž ovlivňuje chování prvku pouze po vzniku trhlin, přičemž dochází k ovlivnění jak únosnosti v okamžiku zplastizování výztuže, tak tuhosti prvku porušeného trhlinami. Pro výztuž z vyšší meze kluzu ovšem dochází k dosažení maximální únosnosti při nižších hodnotách poměrného zkroucení. Na tomto místě je vhodné zároveň zmínit, že u žádného modelu nebylo pozorováno dosažení meze pevnosti výztuže  $f_{st}$ .

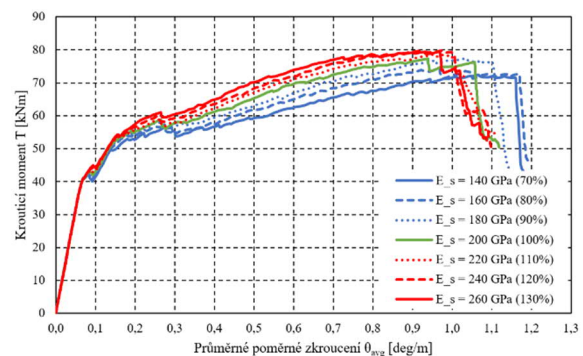
Ve všech případech byl dosažen vrchol pracovního diagramu krátce po dosažení meze kluzu výztuže  $f_{sy}$ . Nárůst napětí ve výztuži nad rámec meze kluzu nikdy nepřekročil hodnotu 5 MPa.



Obrázek 17: Vliv meze kluzu výztuže – pracovní diagramy.

Nakonec, Obrázek 18 zobrazuje vliv modulu pružnosti výztuže. Dle očekávání vykazují modely s nižším modulem pružnosti větší poměrné zkroucení při dosažení meze kluzu. Relativní rozdíl ve zkroucení jednotlivých modelů je ale mnohem menší než relativní rozdíl v modulech pružnosti výztuže. Z toho lze usuzovat, že beton přispívá k celkové tuhosti prvku i po jeho značeném porušení trhlinami.

Poměrně překvapivým výsledkem je viditelný vliv modulu pružnosti výztuže na únosnost při dosažení meze kluzu. Při zohlednění obecně velmi malého rozptylu hodnot modulu pružnosti výztuže je ovšem tento vliv defacto zanedbatelný, jelikož betonářská ocel téměř nikdy nenabývá hodnot  $E_s$  mimo interval 180 až 220 GPa.



Obrázek 18: Vliv modulu pružnosti výztuže – pracovní diagramy.

#### 5.4. Statistické vyhodnocení výsledků

Výše uvedené komplexní pracovní diagramy jsou dále statisticky vyhodnoceny, a to se zaměřením na vliv jednotlivých parametrů na krouticí moment při vzniku trhlin  $T_c$  a krouticí moment v okamžiku zplastizování výztuže  $T_s$ .

Kvantitativně je vyhodnocení provedeno pomocí lineární regrese, tedy proložení datových bodů přímkou, která minimalizuje chybu metodou nejmenších čtverců. Příмка je popsána rovnicí:

$$y = a \cdot x + b \quad (6)$$

kde  $y$  je měřená (závislá) proměnná  
 $x$  je předepsaná (nezávislá) proměnná

$a, b$  koeficienty přímky určující sklon a výšku

Kvalitativní vyhodnocení je provedeno pomocí Pearsonova korelačního koeficientu:

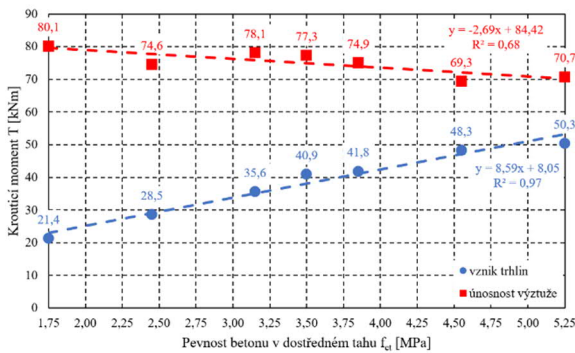
$$R = \frac{1}{n-1} \cdot \sum \left[ \frac{(x_i - \bar{x})}{\sigma_x} \cdot \frac{(y_i - \bar{y})}{\sigma_y} \right] \quad (7)$$

kde  $\sigma_x, \sigma_y$  jsou směrodatné odchylky proměnné  $x$  a  $y$

Pearsonův koeficient v intervalu  $<-1;1>$  vyjadřuje míru s jakou se naměřená data blíží bodům na regresní přímce, přičemž kladné hodnoty blízké 1 značí vysokou pozitivní korelaci dat a záporného hodnoty blízké -1 značí vysokou negativní korelaci dat.

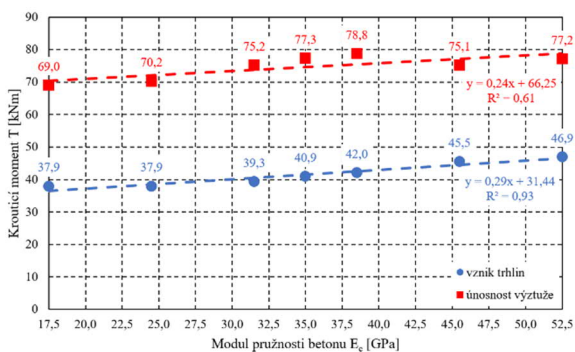
Dále v textu bude kvalita korelace hodnocena druhou mocninou Pearsonova koeficientu  $R^2$ , tzv. koeficientem determinace. Pokud se jeho hodnota blíží 1, lze s vysokou mírou jistoty předpokládat, že závislost mezi zkoumanými veličinami je skutečně lineární.

Vyhodnocení vlivu tahové pevnosti betonu uvádí Obrázek 19. Je zřejmá vysoká pozitivní korelace únosnosti při vzniku trhlin a relativně slabá záporná korelace při zplastizování výztuže.



Obrázek 19: Vliv tahové pevnosti betonu na únosnost v kroucení.

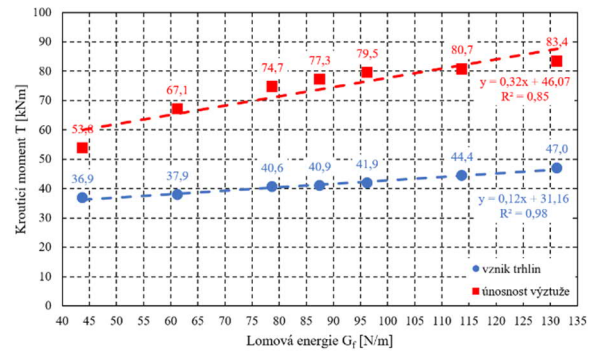
Obrázek 20 zobrazuje vliv modulu pružnosti betonu, který pozitivně ovlivňuje obě posuzované únosnosti v kroucení. Korelace v okamžiku vzniku trhlin je silnější.



Obrázek 20: Vliv modulu pružnosti betonu na únosnost v kroucení.

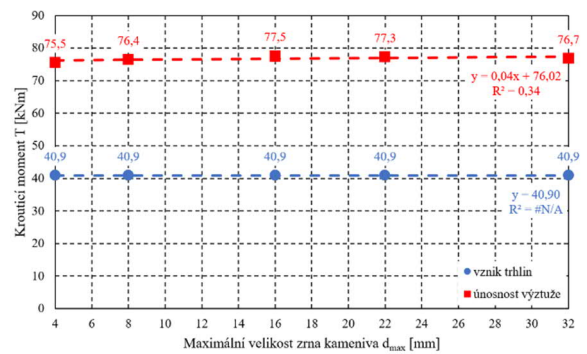
Obrázek 21 udává vliv lomové energie betonu. Ta má pozitivní vliv na únosnost v okamžiku vzniku trhlin i v okamžiku dosažení meze kluzu výztuže. Korelace je v obou případech velmi silná, ačkoliv u zplastizování výztuže

lze pozorovat jistý pokles na konci zkoumaného intervalu, který by musel být potvrzen rozšířením naměřených dat.



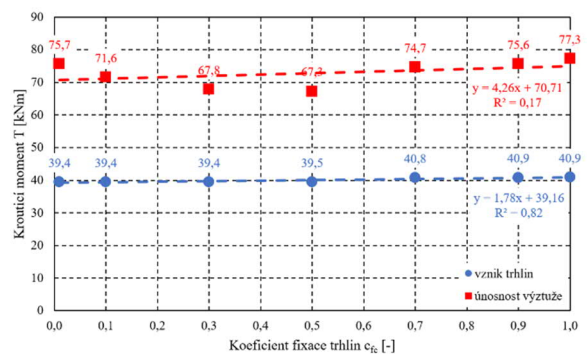
Obrázek 21: Vliv lomové energie betonu na únosnost v kroucení.

Zanedbatelný vliv maximální velikosti zrna kameniva na únosnost v kroucení byl již diskutován v předchozí kapitole a je potvrzen rovněž v rámci statistického vyhodnocení, viz Obrázek 22. Z grafu je zřejmý nulový vliv na únosnost při vzniku trhlin a téměř nulový vliv na únosnost v okamžiku dosažení meze kluzu výztuže.



Obrázek 22: Vliv maximální velikosti kameniva na únosnost v kroucení.

Z vyhodnocení vlivu směru šíření trhlin je opět vyřazen model s plně rotovanými trhlinami ( $c_{fc} = 0,00$ ), viz diskuze v předchozí kapitole. Vliv na oba sledované typy únosností je zcela zanedbatelný. Vliv na únosnost v okamžiku dosažení meze kluzu výztuže je navíc velice slabě korelován.

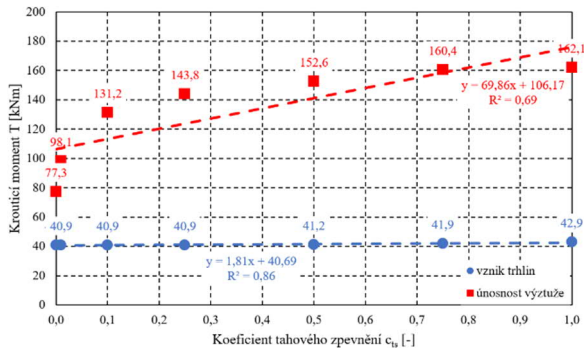


Obrázek 23: Vliv směru šíření trhlin na únosnost v kroucení.

Vliv tahového zpevnění na únosnost v kroucení zobrazuje Obrázek 24. Je patrné, že tahové zpevnění ovlivňuje pouze

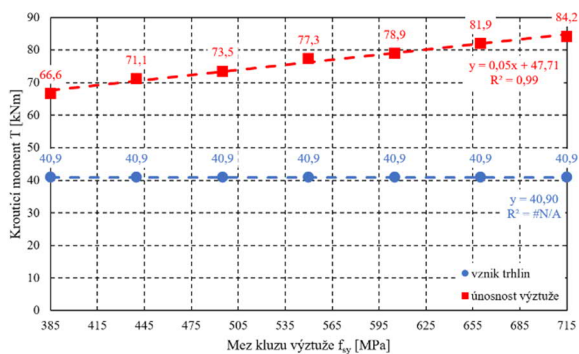


únosnost v okamžiku zplastizování výztuže. Jak bylo diskutováno v předchozí kapitole, nárůst únosnosti v závislosti na koeficientu tahového zpevnění  $c_{ts}$  je extrémně vysoký a neodpovídá reálným pozorováním na experimentálních tělesech.



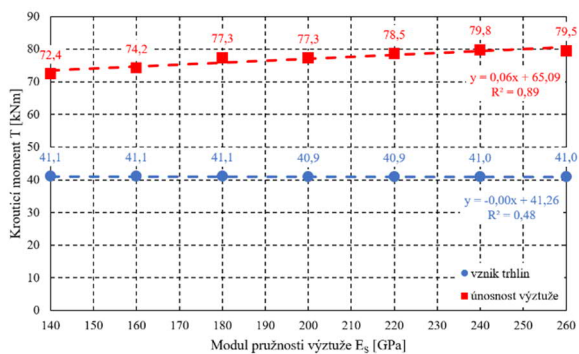
Obrázek 24: Vliv tahového zpevnění betonu na únosnost v kroucení.

Obrázek 25 ukazuje vyhodnocení vlivu meze kluzu výztuže, která dle očekávání pozitivně ovlivňuje pouze únosnost v okamžiku zplastizování výztuže s velmi silnou korelací.



Obrázek 25: Vliv meze kluzu výztuže na únosnost v kroucení.

Modul pružnosti výztuže rovněž ovlivňuje pouze únosnost v okamžiku zplastizování výztuže. Korelace dat je silná, ovšem při zohlednění tradičně velmi nízkého rozptylu hodnot modulu pružnosti výztuže je patrné, že vliv na únosnost je z praktického hlediska zanedbatelný.



Obrázek 26: Vliv modulu pružnosti výztuže na únosnost v kroucení.

## 6. SHRNUTÍ A ZÁVĚR

V předloženém článku byl na experimentálně validovaných numerických modelech zhodnocen vliv osmi důležitých materiálových parametrů na průběh pracovního diagramu  $T-\theta_{avg}$  krátkého železobetonové nosníku s obdélníkovým průřezem vystaveného čistému kroucení. Speciálně byl podrobně statisticky vyhodnocen vliv těchto materiálových parametrů na únosnost při vzniku trhlin  $T_c$  a únosnost v okamžiku dosažení meze kluzu výztuže  $T_s$ .

Z nelineární numerické analýzy provedené na téměř 50 modelech v programu ATENA Science vyplývají následující závěry:

- Tahová pevnost betonu  $f_{ct}$ , modul pružnosti betonu  $E_c$ , lomová energie betonu  $G_f$  a mez kluzu výztuže  $f_{sy}$  mají výrazný vliv na chování i únosnost kroucených železobetonových prvků
- Maximální velikost kameniva  $d_{max}$  a modul pružnosti výztuže  $E_s$  nemají žádný nebo jen zcela zanedbatelný vliv na chování a únosnost kroucených železobetonových prvků.
- Směr šíření trhlin (v článku vyjádřený koeficientem fixace trhlin  $c_{fc}$ ) ovlivňuje chování krouceného prvku pouze krátce po vzniku trhlin, ale nemá téměř žádný vliv na únosnost v kroucení (pro koeficient v intervalu 0,01 až 1,00).
- Uvážení plně rotovaných trhlin ( $c_{fc} = 0,00$ ) vede na fyzikálně nereálné chování prvku s extrémním rozšiřováním jediné makrotrhliny.
- Tahové zpevnění betonu (v článku vyjádřené koeficientem tahového zpevnění  $c_{ts}$ ) vede na chování prvku, které neodpovídá pozorování během experimentů, a to i pro velice nízké hodnoty koeficientu, např.  $c_{ts} = 0,01$ . Tento jev se dosud autorovi článku nepodařilo spolehlivě objasnit.

Uvedené závěry ukazují, že pro věrohodnou numerickou simulaci železobetonových prvků s masivním průřezem vystavených kroucení je třeba přesná znalosti nejméně 4 následujících materiálových parametrů:

- pevnost betonu v dostředném tahu;
- modul pružnosti betonu;
- lomová energie betonu;
- mez kluzu výztuže.

Při provádění experimentálních zatěžovacích zkoušek kroucených prvků, které mají sloužit jako podklad pro následnou numerickou (příp. jinou) analýzu by proto vždy měly být výše uvedené materiálové vlastnosti stanoveny, a to s maximální možnou přesností.

Stanovení přesných hodnot některých z uvedených parametrů přitom může představovat náročný úkol, především v případě pevnosti betonu v dostředném tahu (viz např. Tipka (2017)) a v případě lomové energie s vyloučením vlivu *size effectu* (viz např. RILEM (1985) a Xu et al. (2018)).

Nelze s jistotou vyloučit, že na chování kroucených prvků nemají vliv i některé další materiálové parametry, které nebyly v tomto článku zkoumány.

## 7. PODĚKOVÁNÍ

Tento článek vznikl jako součást řešení projektu Studentské grantové soutěže SGS21/043/OHK1/1T/11 – *Analýza chování mostních konstrukcí s prvky z UHPC*. Autor by tímto chtěl poděkovat za podporu.

Poděkování patří rovněž Ing. Lukáši Boháčkovi za laskavé poskytnutí experimentálních dat kroucených železobetonových nosníků, která byla využita v tomto článku.

## Literatura

- Coulomb, C-A. (1776). Sur une application des regles maximis et minimis a quelques problems de statique, relatives a l'architecture, *Acad Sci Paris Mem Math Phys*. **7**, 343-382.
- Červenka, V. & Jendele, L. & Červenka, J. (2018). *ATENA Program Documentation – Part 1 – Theory*. Prague.
- Čítek, D. & Blažková, A. et al. (2020). *Expertní zpráva: Zatěžovací zkoušky železobetonových sloupů v kroucení*. Praha. Kloknerův ústav.
- ČSN EN 1992-1-1 (2019). *Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. ed. 2. Praha: ÚNMZ.
- ČSN EN 206+A1 (2017). *Beton – Specifikace, vlastnosti, výroba a shoda*. Praha: ÚNMZ.
- ČSN EN 10080 (2005). *Ocel pro výztuž do betonu – Svařitelná betonářská ocel – Všeobecně*. Praha: ČNI.
- de Borst, R. (1986). *Non-linear analysis of frictional materials*. Delft. Ph.D. Thesis. Delft University of Technology.
- Elices, M. & Guinea, G. V. & Planas, J. (1997). On the measurement of concrete fracture energy using three-point bend tests, *Materials and Structures*. **30**, 375-376.
- fib Model Code for Concrete Structures 2010*. Berlin: Wilhelm Ernst & Sohn. ePDF ISBN 978-3-433-60408-3.
- Jásiński, R. (2017). Identification of the Parameters of Menétrey-Willam Failure Surface of Calcium Silicate Units, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* **245**, 032045.
- Menétrey, P. & Willam, K. J. (1995). Triaxial failure criterion for concrete and its generalization, *ACI, Structural Journal* **92(3)**, 311-318.
- Mohr, O. (1900). Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?, *Zeit des Ver Deut Ing.* **44**, 1524-1530.
- Paul, B. (1968). Generalized pyramidal fracture and yield criteria, *Int J Solids Struct.* **4**, 175-196.
- RILEM Draft Recommendation (1985). Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams, *Materials and Structures*. **18**, 287-290.
- Tipka, M. (2017). *Tahové vlastnosti konstrukčních vláknobetonů*. Praha. Disertační práce. České vysoké učení technické v Praze. Fakulta stavební. Katedra betonových a zděných konstrukcí. Školitel: Vašková, J.
- Vecchio, F. J. & Collins, M. P. (1986). Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear, *ACI Journal, Proc.* **83(2)**, 219-231.
- Vítek, J. L. & Boháček, L. & Průša, J. & Křístek, V. (2020). Torsion of Rectangular Concrete Section, In *Examples for The Design of Reinforced and Prestressed Concrete Members Under Torsion – An ACI Technical Publication – Symposium Volume*. 111-130.
- Vecchio, F. J. & Collins, M. P. (1986). Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear, *ACI Journal, Proc.* **83(2)**, 219-231.
- Xu, P. & Ma, J. & Zhang, M. & Ding, Y. & Meng, L. (2018). Fracture Energy Analysis of Concrete considering the Boundary Effect of Single-Edge Notched Beams, *Advances in Civil Engineering*, 2018(9), 1-10.