

# ALGORITMIZACE POSOUZENÍ HLAVNÍCH NAPĚTÍ PO VÝŠCE PRŮŘEZU

Adam Froněk, \*

Katedra betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební,  
České vysoké učení technické v Praze, Tháškova 7/2077, 166 29 Praha 6, Česká republika.  
adam.fronek@fsv.cvut.cz

## ABSTRAKT

Príspevek popisuje jednoduchý nástroj pro vykreslení hlavních napětí po výšce průřezu pro předpjaté prvky a následné ověření vzniku smykových trhlin ve stěně prvku. Pro výpočet byl zvolen program pro algoritmické modelování *Grasshopper*, který řeší problém proužkovou metodou.

Účel vytvoření nástroje je minimalizace pracnosti pro zefektivnění práce pro tvarově složitě průřezy, velké množství posuzovaných řezů nebo průřezy proměnné po délce konstrukce.

## KLÍČOVÁ SLOVA

hlavní napětí • smykové trhliny • proužková metoda • algoritmus • Grasshopper

## ABSTRACT

The paper describes simple tool for graphical visualization of principal stresses by cross section height for prestressed elements and assessment shear cracks initiation in element's wall. For computation was selected program for an algorithmic modeling *Grasshopper*, which is solving the problem by using strip method.

The aim of creating the tool is to minimal effort for work efficiency with difficult cross sections shapes, great amount of assessed sections or cross sections with variable definition by structure length.

## KEYWORDS

principal stress • shear cracks • strip method • algorithm • Grasshopper

## 1. ÚVOD

Posouzení hlavních napětí se provádí v předpjatých stěnových prvcích pro omezení šířky smykových trhlin. Hlavní napětí se určí z normálového a smykového napětí v průřezu. Smykové napětí je závislé na hodnotě šířky průřezu a statického momentu, které jsou po výšce průřezu proměnné. Na rozdíl od normálového napětí, které je závislé na průřezovém modulu, a který nabývá extrémních hodnot na okraji průřezu (podle teorie pružnosti), nelze obecně určit pozici extrémní hodnoty smykového napětí po výšce průřezu.

Statický moment je vyjádřen jako plocha odříznuté části násobená vzdáleností k těžišti průřezu. Šířka průřezu je obecně lomená křivka a nárůst plochy po výšce nelze předepsat jednou funkcí. Právě pracnost a proměnlivost výpočtu statického momentu je motivací algoritmizace úlohy pomocí modelovacího programu *Grasshopper*.

Nástroj byl vypracován v návaznosti na problematiku řešenou v diplomové práci.

\* Supervisor: doc. Ing. Lukáš Vráblík, Ph.D., FEng.

## 2. TEORETICKÝ ZÁKLAD

Posouzení hlavních napětí (tj. vznik smykových trhlin) se provede dle (ČSN EN 1992-2 (73 6208) 2007). Pro ověření je nutné nalézt maximální tahové napětí, které ve stěně komory vzniká, tj. hlavní napětí. Hlavní napětí jsou taková, kdy jsou smyková napětí nulová. Normálová napětí pak dosahují (ve vzájemně kolmých směrech) extrémních hodnot. Nalezení těchto maxim (resp. minim) odpovídá určitému natočení souřadného systému, kde je podmínka smykového napětí splněna.

Hlavní napětí lze určit jako kořeny rovnice z aplikace Mohrovy kružnice (Lamboj 2005).

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (1)$$

Pro hledání napjatosti na prutovém prvku po jeho výšce, působí normálové napětí pouze v jednom směru.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xz}^2} \quad (2)$$

Rovnice vychází z řešení vlastních čísel tenzoru napětí. Jak již bylo zmíněno, hlavní napětí jsou taková, kde smyková napětí jsou rovna nule. Předvedením rovnic podle složek napětí (Petrtyl a Vondrová 2003) do maticové formy problém vypadá následovně.

Tabulka 1: Použité veličiny hlavních napětí.

Symbol	Název veličiny
$[\sigma]$	tenzor napětí
$\sigma_v$	napětí na libovolně orientované ploše N
$\nu$	vektor směrových cosinů normály roviny N
$\sigma_0$	tenzor hlavních napětí
$\sigma_{x,y,z}$	normálové napětí roviny x,y,z
$\tau_{xy}$	smykové napětí roviny xy

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\nu = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\sigma_v = [\sigma] \nu \wedge \sigma_v = \sigma_0 \nu \Rightarrow [\sigma] \nu = \sigma_0 \nu \quad (5)$$

$$([\sigma] - \sigma_0 I) \nu = 0 \Rightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \quad (6)$$

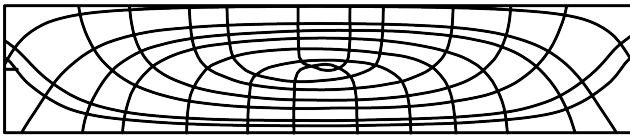
Pro zadané okrajové podmínky jedno dimenzionálního prvku (prutu) jsou normálová napětí (a odpovídající smyková napětí) ve směrech  $y$  a  $z$  nulová. Nulové se uvažují i smykové účinky v příčném směru ( $V_y = 0$ ) a platí vzájemnost smykových napětí.

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \wedge \tau_{yi} = 0 \quad (7)$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \neq 0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

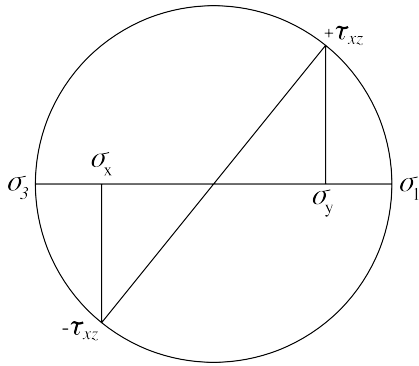
Vlastní čísla se zapisují v pořadí od největšího po nejmenší, tj.  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Nutno podotknout, že posouzení se provádí pro předpjatý beton a normálové napětí je tlakové  $\sigma_x < 0$ . Napětí  $\sigma_1$  značí hlavní tahové napětí a  $\sigma_3$  značí hlavní tlakové napětí.

Změnou vnitřních sil (resp. jejich poměru) po délce nosníku se bude měnit i velikost hlavních napětí. Změna po délce je dobře patrná při vykreslení hlavních napětí po délce prvku.



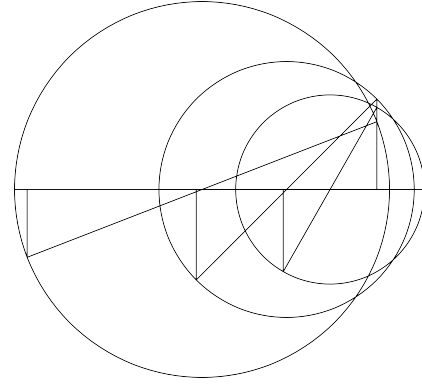
Obrázek 1: Příklad trajektorií hlavních napětí po délce nosníku.

Pro oblast podepření je sklon hlavních napětí velký, to znamená, že posouvající síla je významná. Vztah mezi jednotlivými napětími je dobře představitelný pomocí Mohrovy kružnice, kde pootočení trajektorií hlavních napětí po délce prvku znamená pootočení od vodorovné osy na Mohrově kružnici.



Obrázek 2: Mohrova kružnice.

Podle tohoto schématu obecně vzniká normálové napětí  $\sigma_y$ . To se neshoduje s tenzorem napětí  $[\sigma]$  pro 1D prvek. Výpočetně (resp. graficky) lze, díky sestavenému nástroji, určit že hodnota v místě napětí  $\sigma_y$  je po výšce průřezu konstantní s nulovou hodnotou.



Obrázek 3: Mohrovy kružnice po výšce průřezu.

### 3. MATERIÁLOVÁ CHARAKTERISTIKA

Pro posouzení vzniku smykových trhlin se určí směrově závislá pevnost betonu v tahu  $f_{ctb}$ . Ta je závislá na velikosti hlavního tlakového napětí, tudíž je po výšce průřezu proměnná. Pevnost je určena podle Eurokódu (ČSN EN 1992-2 (73 6208) 2007).

Tabulka 2: Použité veličiny pro posouzení.

Symbol	Název veličiny
$f_{ctb}$	směrově závislá pevnost betonu v tahu
$\sigma_1$	hlavní napětí v tahu
$\sigma_3$	hlavní napětí v tlaku (v absolutní hodnotě)

$$f_{ctb} = \left(1 - 0,8 \frac{\sigma_3}{f_{ck}}\right) \cdot f_{ctk,0.05} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 < 0,6 \cdot f_{ck} & \quad \text{ověření betonu v tlaku} \\ \sigma_1 < f_{ctb} & \quad \text{návrh minimální výztuže} \\ \sigma_1 \geq f_{ctb} & \quad \text{nutné ověřit omezení trhlin} \end{aligned}$$

### 4. NAPĚTÍ

Výpočet působících normálových a smykových napětí v průřezu se provede podle teorie pružnosti.

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z \quad (10)$$

$$\tau_{xz} = \frac{V_z \cdot S_y(z)}{b \cdot I_y} \quad (11)$$

$$S_{y,i}(z) = A(z) \cdot |z_t - z| \quad (12)$$

Hodnota statického momentu  $S_y$  je závislá na umístění v průřezu (souřadnici  $z$ ). Statický moment, se vypočte jako plocha oddělené části násobená vzdáleností těžiště průřezu a těžiště této oddělené části. Pro ruční nebo tabulkový výpočet je takový postup pro členitý průřez složitý a mnohdy nepřesný. Proto byl zvolen modelovací software.

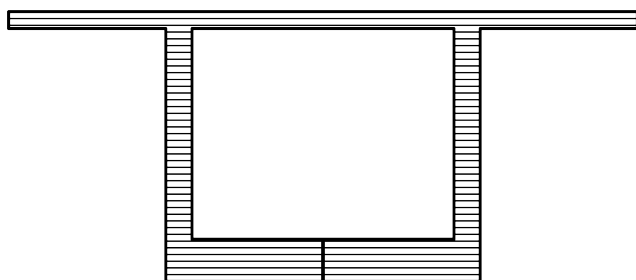
### 5. POPIS VÝPOČETNÍHO NÁSTROJE

Výpočet byl sestaven v programu pro algoritmické modelování *Grasshopper*.

Vstupními parametry jsou

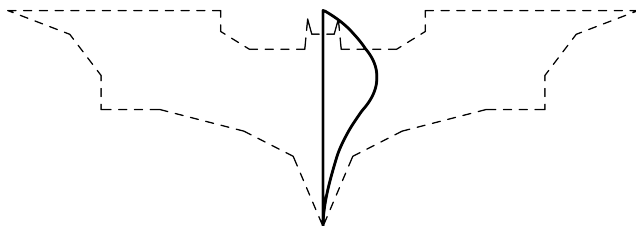
- třída betonu –  $f_{ck}, f_{ctk,0.05}$
- vnitřní síly –  $N, M_y, V_z$
- tvar průřezu

Přesnost výpočtu je řízena počtem jednotlivých proužků. Počet proužků (hustota sítě) je rovnoměrně rozdělen od horních nebo dolních vláken k těžišti průřezu. Nejedná se přímo o rovnoměrné prvky, ale o odříznutou plochu vždy zvětšenou o jeden krok. Je definována plocha odříznuté části a vzdálenost k těžišti průřezu. Výpočet probíhá pro oblast nad a pod těžištěm paralelně, výsledky jsou následně sloučeny do jedné množiny.



Obrázek 4: Dělení komorového průřezu na jednotlivé proužky.

Pro definici průřezu lze zadat v prostředí programu *Rhinoce-ros* libovolnou uzavřenou křivku. Omezení křivky je v použití polygonálního průřezu, jelikož určité části výpočtu pracují s krajními pozicemi křivky. Nástroj funguje i pro křivky s částečně hladkými průběhy průřezu, při dodržení 4 krajních hodnot (SV, SZ, JV, JZ), ze kterých je přebírána určitá definice průřezu.



Obrázek 5: Statický moment  $S_y$  pro libovolnou křivku.

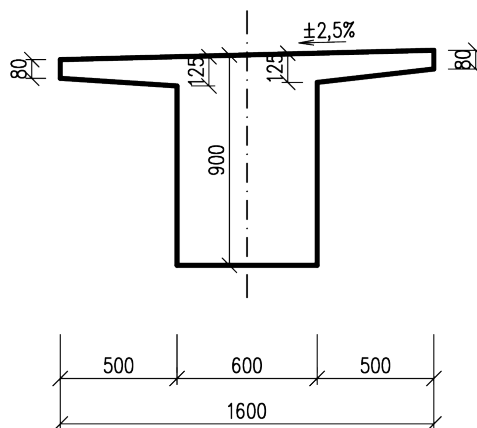
Pro další praktické použití byla sestavena i parametrická definice dvou typických průřezů pro mostní betonové konstrukce – T-průřez (4 parametry) a komora (6 parametrů).

Pouze pro doplnění daného problému hlavních napětí lze v rámci nástroje zobrazovat Mohrovy kružnice, které byly použity výše v textu.

## 6. POUŽITÍ PRO KONKRÉTNÍ OKRAJOVÉ PODMÍNKY

Pro demonstraci algoritmu byly použity okrajové vstupní parametry z příkladu v rámci předmětu *Betonové konstrukce 3K*.

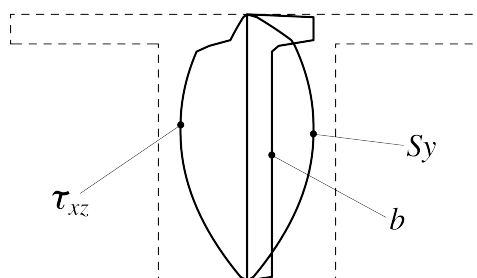
Konstrukce mostu je integrovaný rám. V příčném řezu je konstrukce tvořena prefabrikovanými nosníky tvaru T. Byla převzata definice tvaru a vstupní vnitřní síly.



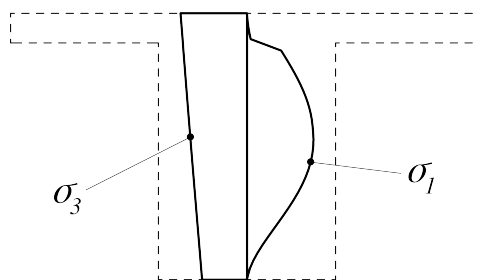
Obrázek 6: Uvažovaný příčný řez.

Tabulka 3: Výchozí vnitřní síly.

N [kN]	M [kNm]	V [kN]
-4139.36	134.5	-165.8



Obrázek 7: Smykové napětí  $\tau_{xz}$ , statický moment  $S_y$  a šířka průřezu  $b$ .



Obrázek 8: Hlavní napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_3$ .

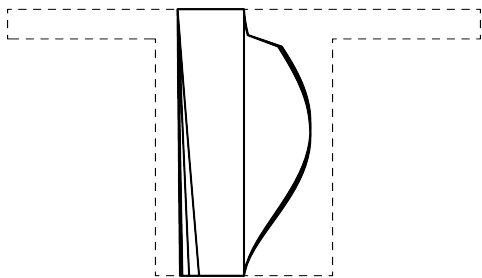
Průřez vyhovuje a smykové trhliny nevznikají.

Hlavní tahové napětí  $\sigma_1$  úzce souvisí se smykovým napětím  $\tau_{xz}$ . Definice těchto napětí se váže na náhlou změnu průřezu. V případě, že daná oblast bude rozhodující pro posouzení (takový případ by mohl nastat při velkém záporném ohybovém momentu), je nutné zvýšit jemnost proužků pro správnou definici této nespojitě oblasti.

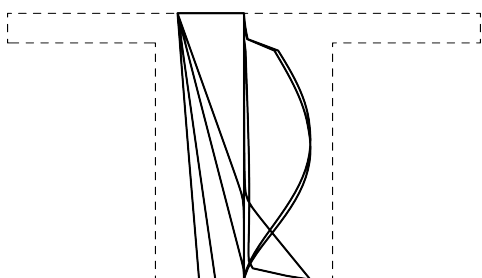
## 7. CITLIVOSTNÍ ANALÝZA

Pro analýzu chování hlavních napětí byly odděleně navýšeny působící vnitřní síly. Nárůst proběhl v násobcích 1, 2, 5 a 10. Je dobré

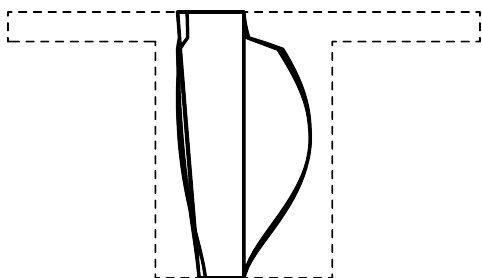
poznámenat, že vykreslení vyjadřuje normované průběhy a citlivostní analýza sleduje pouze změnu průběhu napětí a nikoliv překročení limitní hodnoty.



Obrázek 9: Citlivost hlavních napětí – normálová síla  $N$ .

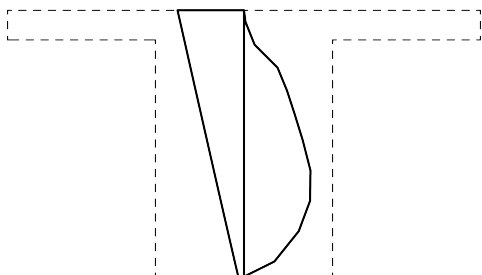


Obrázek 10: Citlivost hlavních napětí – ohybový moment  $M_y$ .

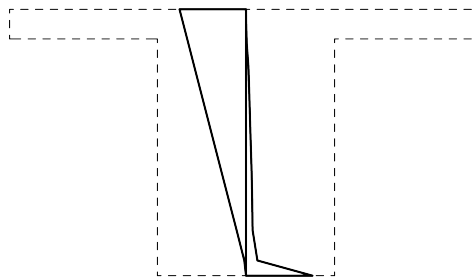


Obrázek 11: Citlivost hlavních napětí – posouvající síla  $V_z$ .

Pro normálovou sílu  $N$  a posouvající sílu  $V_z$  lze při navýšení hodnot sledovat pouze malé odchylky od původního průběhu. Úpravou těchto vnitřních sil není nutné sledovat přerozdělení průběhu působení, pouze změnu velikosti napětí. Při nárůstu ohybového momentu  $M_y$  došlo k výraznému přerozdělení působení. Změna má skokový charakter, proto byla přesnějším navýšením působícího momentu nalezena kritická hodnota.



Obrázek 12: Hlavní napětí před dosažením tahu u dolních vláken.



Obrázek 13: Hlavní napětí po dosažení tahu u dolních vláken.

K výraznému přerozdělení hlavního tahového napětí  $\sigma_1$  dochází k okamžiku dosažení tahového normálového napětí  $\sigma_s$  u krajních vláken průřezu. Tím se vymezuje platnost provedení posouzení smykových trhlin na plně předpjaté prvky. V opačném případě se provede posouzení šířky trhlin vznikajících od ohybu pro částečné předpětí, resp. ověření napjatosti pro omezené předpětí.

## 8. ZÁVĚR

Algoritmické modelování prokázalo dobrou službu při sestavení posouzení obecně definovaného prvku. Nástroj lze efektivně použít dvojím způsobem jako *black box* nebo *white box*. Pro potřebu posouzení lze jednoduchým způsobem ověřit vznik smykových trhlin a velmi rychle měnit definici průřezu nebo vnitřních sil (*black box*). Díky snadným grafickým výstupům dílčích výsledků nebo vykreslení Mohrovy kružnice lze provést analýzu kritických veličin nebo přiblížit definici hlavních napětí po výšce prvku (*white box*).

## Reference

- ČSN EN 1992-2 (73 6208) (květ. 2007). *Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí - Část 2: Betonové mosty - Navrhování a konstrukční zásady*. vč. ZMĚNY Z2. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví.
- Lamboj, Ladislav (2005). *Mechanika zemin a zakládání staveb*. Vyd. 1. Praha: ČVUT. ISBN: 80-01-03094-6.
- Petrtyl, Miroslav a Radmila Vondrová (2003). *Stavební mechanika 32. příručka základů stavební mechaniky a pružnosti*. Vyd. 4. Praha: ČVUT. ISBN: 80-01-02694-9.