

KLASIFIKACE BETONOVÝCH TENKOSTĚNNÝCH PRŮŘEZŮ ZALOŽENÁ NA NAPJATOSTI PŘI KROUCENÍ

Jan Vesecký, *

Katedra betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební,
České vysoké učení technické v Praze, Thákurova 7/2077, 166 29 Praha 6, Česká republika.
jan.vesecky@fsv.cvut.cz

ABSTRAKT

Tenkostěnné průřezy se ve stavebnictví tradičně uplatňují u kovových (nejčastěji ocelových) konstrukcí, zatímco průřezy betonových konstrukcí jsou typicky masivní. V posledních letech ale rozvoj cementových kompozitů, především tzv. ultravysokohodnotných betonů (UHPC), umožnil realizaci stále subtilnějších konstrukcí, jejichž průřezy se svými proporcemi začínají blížit právě ocelovým tenkostěnným průřezům. Kritéria pro rozhodnutí, zda se o tenkostěnný průřez opravdu jedná, ovšem chybí, příp. jsou čistě empirická až „zvyklostní“.

V tomto článku je proto představen systematický postup hodnocení průřezů, a to na základě pružného rozložení napětí při volném a vázaném kroucení, porovnáním přesných (resp. numerických) hodnot, s výsledky zjednodušených analytických vztahů. Tento klasifikační systém umožní snadno rozlišit tenkostěnné a tlustostěnné průřezy, a to pro zvolenou míru přesnosti aproximace.

KLÍČOVÁ SLOVA

Beton • UHPC • Tenkostěnný průřez • Klasifikace • Napjatost • Kroucení

ABSTRACT

Thin-walled cross-sections are traditionally used in the construction industry for metal (mostly steel) structures, while concrete cross-sections are typically robust. In recent years, however, the development of cementitious composites, particularly ultra-high performance concrete (UHPC), has enabled the construction of increasingly subtle structures with cross-sections that are approaching the proportions of steel thin-walled cross-sections. Nevertheless, the criteria for deciding whether a specific cross-section is truly thin-walled are lacking or are purely empirical or even 'customary'.

Therefore, a systematic procedure for the evaluation of cross-sections is presented in this paper, based on the elastic stress distribution under St. Venant and warping torsion, by comparing the exact (or numerical) values with the results of simplified analytical relations. This classification system allows thin-walled and thick-walled cross-sections to be easily distinguished for a chosen level of approximation accuracy.

KEYWORDS

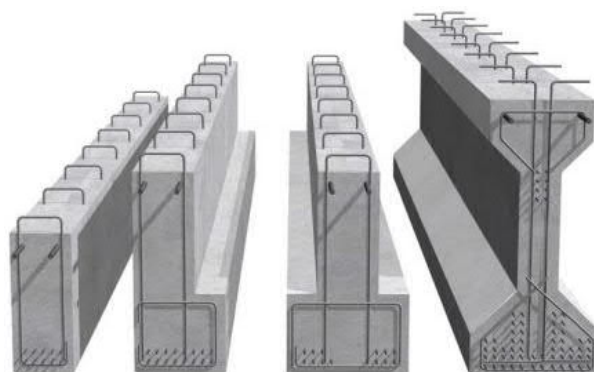
Concrete • UHPC • Thin-Walled Cross-Section • Classification • Stress Distribution • Torsion

1. ÚVOD

1.1. Motivace

Beton a ocel, jakožto dva nejdůležitější konstrukční materiály, se tradičně natolik liší svými vlastnostmi, že vedou ke zcela odlišnému přístupu návrhu geometrie průřezů pro prvky vyrobených z těchto materiálů.

Kvůli nižší pevnosti, tuhosti, ale i objemové hmotnosti a s ohledem na proveditelnost, naprostá většina betonových prvků využívá průřezy složené ze základních geometrických obrazců, především ve tvaru obdélníku, čtverce, kruhu a tvarů z nich odvozených. Tyto průřezy lze souhrnně označit jako tzv. *masivní* a jejich společným znakem jsou srovnatelné dimenze ve všech směrech, kdy žádný rozměr výrazně nepřevládá nad ostatními (viz Obrázek 1). Za masivní lze běžně označit i tzv. komorové betonové průřezy, jelikož poměr výšky (resp. šířky) a tloušťky jejich stěn je zpravidla relativně malý.

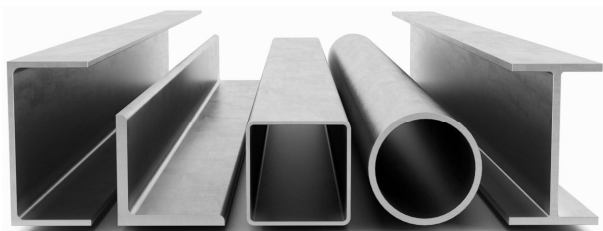


Obrázek 1: Typické betonové prvky s masivními průřezy.

Naopak ocel díky své vysoké pevnosti, tuhosti, ale i objemové hmotnosti, umožňuje a do značné míry vyžaduje návrh geometricky optimalizovaných průřezů, např. ve tvaru písmen I, H, L, U, C apod. a dále ve tvaru kruhových, čtvercových a obdélníkových trubek. Souhrnně se jedná o tzv. *tenkostěnné* průřezy,

* Školitel: doc. Ing. Lukáš Vráblík, Ph.D., FEng.

sestavající z tenkých částí, jejichž tloušťka je mnohonásobně menší než ostatní rozměry průřezu (viz Obrázek 2).



Obrázek 2: Typické ocelové prvky s tenkostěnnými průřezů.

Až do nedávné doby byly rozdíly v geometrii betonových a ocelových průřezů natolik výrazné (z důvodu výše popsaných rozdílů v mechanických a fyzikálních vlastnostech), že v naprosté většině případů nebylo pochyb o „masivnosti“ betonových průřezů a naopak „tenkostěnnosti“ průřezů ocelových.

Přibližně v posledních dvou až třech desetiletích byla ale vyvinuta skupina betonů s mimořádnými vlastnostmi, souhrnně označovanými jako ultra-vysokohodnotné betony (UHPC), které se některými svými vlastnostmi (především tlakovou pevností) blíží vlastnostem oceli. Tyto vlastnosti (a zároveň výrazně vyšší cena v porovnání s běžným betonem) logicky směřují k návrhu průřezů, které minimalizují spotřebu materiálu a svou geometrií (viz Obrázek 3) se začínají podobat právě ocelovým průřezům. Z důvodu jistých konstrukčních omezení (souvisejících mj. se schopností vyplnit formu a s rozměry rozptýlené výztuže) a rovněž z důvodu některých relativně horších mechanických vlastností v porovnání s ocelí (především tahové pevnosti a modulu pružnosti) nicméně tloušťka dílčích částí průřezů z UHPC nedosahuje tak velké štíhlosti, aby bylo možné tyto průřezy automaticky klasifikovat jako tenkostěnné.



Obrázek 3: Příklady prvků z UHPC s průřezů nejasné klasifikace (Graybeal 2009, Delauzun et al. 2009).

Vzniká tedy určitá „šedá zóna“ průřezů na pomezí masivních a tenkostěnných za současné absence jasných klasifikač-

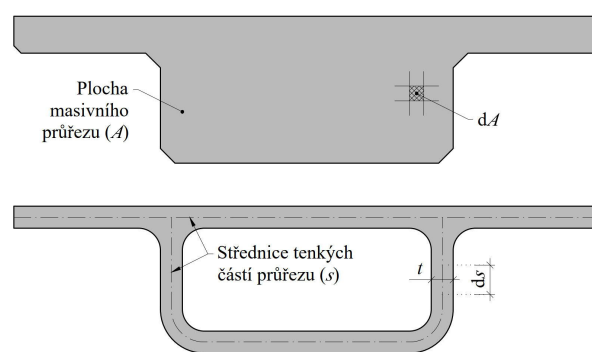
ních kritérií, které by umožnily rozlišit tyto dvě kategorie. Rozlišení masivních a tenkostěnných průřezů přitom zásadním způsobem ovlivňuje následnou analýzu konstrukce.

1.2. Význam rozlišení masivních a tenkostěnných průřezů

Z hlediska praktického navrhování konstrukcí jsou průřezů jednotlivých konstrukčních prvků jedním z nejdůležitějších vstupních údajů a zároveň základním posuzovaným místem. Pro analýzu konstrukce je pak nezbytná znalost *tuhosti* jednotlivých průřezů a zároveň namáhání vyvolaného působícími (vnitřními) silami, které je nejčastěji vyjádřeno ve formě normálových a smykových napětí (zjednodušeně *najpatosti*).

Tuhost a najpatost průřezů je ale obecně definována integrálními a diferenciálními vztahy v plošných oblastech vymezených tvarem průřezu. Tyto vztahy a rovnice jsou relativně snadno řešitelné při namáhání průřezů osovými silami nebo ohybem, obtížněji řešitelné v případě namáhání smykem a velmi složitě řešitelné v případě namáhání kroucením.

A právě z těchto důvodů je zcela zásadní, zda lze analyzovaný průřez považovat za tenkostěnný nebo je třeba na něho pohlížet jako na průřez masivní. Pro tenkostěnný průřez lze totiž dvourozměrné integrální a diferenciální vztahy zredukovat na křivkové integrály, kde tvar křivky udává střednice jednotlivých tenkých částí průřezu a základní proměnnou je tloušťka těchto částí (schematicky viz Obrázek 4). Řešení těchto křivkových integrálů je zpravidla výrazně jednodušší a mnohdy může být vyjádřeno i v podobě triviálních analytických vztahů. Naopak v případě masivních průřezů musí být řešeny integrální a diferenciální vztahy ve své původní dvourozměrné podobě, přičemž tyto vztahy nejsou pro naprostou většinu tvarů průřezů řešitelné analyticky a lze tak nalézt pouze přibližné numerické řešení, např. s využitím metody konečných prvků nebo podobných numerických metod.



Obrázek 4: Schematické znázornění rozdílů při analýze masivního a tenkostěnného průřezu.

Rozlišení průřezů na masivní a tenkostěnné tedy výrazně ovlivňuje komplexitu nástrojů potřebných pro výpočet, kdy na jedné straně musí být využity pokročilé výpočetní nástroje, a naopak na straně druhé lze výpočet zjednodušit až do podoby analytických vztahů a rovnic.

Zároveň je ale třeba zdůraznit, že při redukci dvourozměrných integrálních a diferenciálních vztahů na křivkové integrály

dochází kromě zjednodušení také ke snížení přesnosti výsledků a pouze pro průřezy s tloušťkou dílčích částí limitně se blízcích nule vedou oba postupy ke zcela shodným výsledkům.

1.3. Současný stav klasifikace tenkostěnných průřezů

Stávající pravidla pro klasifikaci průřezů vychází typicky z hodnocení štíhlosti (λ) jejich dílčí částí dle vztahu:

$$\lambda = \frac{h}{t} \quad (1)$$

kde h je výška (resp. šířka) dílčí části průřezu a t je tloušťka této části, přičemž pokud je dílčí část zakřivená, pak je namísto výšky uvažována délka této křivky, a navíc, pokud je tloušťka proměnná, pak lze konzervativně uvažovat nejtlustší místo.

Klasifikace na základě štíhlosti dílčích částí průřezu je zcela logická, jelikož, jak bylo uvedeno v kapitole 1.2., s klesající tloušťkou dílčích částí průřezu (tedy s rostoucí štíhlostí λ) roste přesnost aproximace tuhosti a napjatosti průřezu pomocí křivkových integrálů. Za problematické lze ale označit současnou praxi stanovení meze štíhlosti, od které lze průřez považovat za tenkostěnný. Tato mez je tradičně určena empiricky a nejčastěji je za ni (viz např. Bažant 1965) považována hodnota:

$$\lambda \geq 10 \quad (2)$$

Není přitom zřejmé, s jakou mírou přesnosti jsou při této limitní (mezní) štíhlosti aproximovány výsledky pomocí křivkových integrálů.

Navíc v případě zmíněných průřezů ocelových konstrukcí jsou zpravidla za tenkostěnné považovány implicitně všechny průřezy složené z dílčích tenkých částí, bez ohledu, zda je mezní štíhlost (2) splněna či nikoliv. U ocelových průřezů je takový přístup do určité míry pochopitelný, jelikož ocel je charakteristická svou výraznou duktilitou, a tudíž případné překročení limitního napětí v dílčí části průřezu vede jen k lokálnímu zplaszování a redistribuci napětí. Naopak u křehkých materiálů, resp. materiálů s omezenou duktilitou, jako běžný beton, resp. UHPC, vede překročení limitního napětí ke vzniku trhlin, které mohou značně ovlivnit další chování i životnost konstrukce.

1.4. Návrh nového systému klasifikace na základě napjatosti při kroucení

V souvislosti s popsány nedostatků současné metodiky klasifikace průřezů je zřejmá nutnost zavedení jednoznačného kritéria, které umožní rozlišení masivních a tenkostěnných průřezů za jasně definovaných podmínek.

Přitom je možné nadále využívat hodnotící parametr štíhlosti dílčích částí průřezu λ dle rovnice (1), ale mezní hodnota nesmí být stanovena pouze empiricky, ale naopak musí být určena exaktně s ohledem na požadovanou přesnost (resp. přípustnou chybovost) *tenkostěnné teorie* (tzn. aproximace pomocí křivkových integrálů).

Ačkoliv lze tenkostěnnou teorii obecně využít pro aproximaci tuhosti a napjatosti průřezů vystavených libovolnému namáhání, je její využití nejprínosnější při analýze namáhání krou-

cením. Zatímco pro ostatní typy namáhání lze často nalézt analytická řešení i pro geometricky komplexní průřezy, v případě kroucení je analytické řešení často velmi složité, až zcela nemožné, pro naprostou většinu masivních průřezů a případná možnost použití tenkostěnné teorie je tak zpravidla jedinou možností, jak eliminovat nutnost použití komplexních výpočetních nástrojů.

Z těchto důvodů je proto v tomto článku navržen a dále prakticky prezentován systém klasifikace tenkostěnných průřezů na základě teorie kroucení. A ačkoliv by bylo možné definovat mezní hodnoty štíhlosti dílčích částí průřezu jak na základě přesnosti aproximace tuhosti, tak aproximace napjatosti, omezují se navržený klasifikační systém prozatím pouze na kritérium přesnosti aproximace napětí, jelikož ho lze s ohledem na praktické uplatnění považovat za důležitější.

2. ZÁKLADY TEORIE KROUCENÍ

Na následujících řádcích jsou stručně shrnuty základy teorie kroucení a uvedeny vztahy nezbytné pro následnou analýzu průřezů, která bude využita k odvození mezních hodnot štíhlosti.

2.1. Zjednodušující předpoklady

Teorie a vztahy popsané dále v kapitolách 2.2. až 2.4. jsou platné při uvážení následujících předpokladů a zjednodušení:

- Konstrukce, resp. všechny její průřezy, jsou vyrobeny z lineárně pružného izotropního materiálu.
- Počáteční tvar průřezů je dokonalý, bez imperfekcí.
- Všechny průřezy zachovávají ve vlastní rovině původní tvar (tzn. zachovávají se úhly mezi dílčími částmi průřezů a nedochází např. k boulení ani jiným nestabilitám).
- Je umožněna deformace průřezů z vlastní roviny (deplanace).
- Veškeré deformace, posuny a pootočení jsou tzv. malé.

2.2. Obecná teorie kroucení

Za obecnou teorii kroucení je pro účely tohoto článku považována teorie, která je platná pro všechny průřezy libovolné geometrie (při splnění předpokladů vyjmenovaných v kapitole 2.1.) tedy včetně masivních průřezů.

Úvodem je nezbytné uvést, že kroucení se dělí na dva základní typy – volné a vázané, které vznikají za odlišných situací a jsou spojeny s rozdílnými vnitřními silami, resp. typy napětí:

- **Volné kroucení:** vzniká obecně ve všech průřezích konstrukcí namáhaných kroucením s výjimkou průřezů, kterým je zcela znemožněno deplanovat; volné kroucení je spojeno s primárním kroutícím momentem (T_i) a vznikem primárních smykových napětí (τ).
- **Vázané kroucení:** projevuje se nejvýrazněji v těch částech konstrukcí, kde je průřezům bráněno deplanovat a v jejich okolí; vázané kroucení je spojeno se sekundárním kroutícím momentem (T_ω) a bimomentem (B) a se

vznikem sekundárních smykových napětí (τ_ω) a normálových napětí (σ_ω).

Celkové účinky kroucení jsou pak součtem dílčích účinků volného a vázaného kroucení. Stanovení poměru mezi oběma typy kroucení v konkrétním průřezu konstrukce je samostatnou úlohou, související s řešením obyčejné diferenciální rovnice 4. řádu. Tato problematika přesahuje zaměření tohoto článku, proto není dále rozvíjena. Obecně lze konstatovat, že poměr vlivů volného a vázaného kroucení může být zcela libovolný, s výjimkou specifických případů, které jsou popsány dále.

Pro potřeby analýzy průřezů je nejprve třeba definovat rovnice a vztahy popisující rozložení základních veličin v ploše průřezu, potřebných pro vyhodnocení účinků kroucení. V této kapitole jsou uvedeny obecné vztahy platné pro libovolnou geometrii průřezu, v dalších kapitolách pak budou uvedeny zjednodušené vztahy využívající tenkostěnné teorie.

Jak vyplývá z výše uvedeného textu, jedním ze stěžejních parametrů průřezu je jeho deplanace, jejíž tvar je obecně definován tzv. deplanační funkcí ($\psi(y,z)$), která je řešením následující parciální diferenciální rovnice:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

kde y a z jsou kartézské souřadnice v rovině průřezu. K této diferenciální rovnici je samozřejmě přidružena okrajová podmínka, definující derivaci deplanační funkce podle normály okraje průřezu (tzv. Neumannova okrajová podmínka). Diferenciální rovnice (3) svou strukturou odpovídá tzv. Laplaceově rovnici a její analytické řešení lze nalézt pouze pro omezené tvary průřezů. Ať už je ale nalezeno analytické nebo přibližné numerické řešení, lze deplanační funkci využít k vyjádření celé řady důležitých veličin, mj. momentu tuhosti ve volném kroucení:

$$I_t = \iint \left(y^2 + z^2 + \frac{d\psi}{dz} \cdot y - \frac{d\psi}{dy} \cdot z \right) dA \quad (4)$$

kde A je oblast vymezená plochou průřezu. Moment tuhosti ve volném kroucení přitom neslouží jen ke stanovení tuhosti průřezu ale i pro stanovení některých navazujících veličin, včetně primárních smykových napětí dle vztahů:

$$\tau_{t,xz} = G \cdot \theta \cdot \left(\frac{d\psi}{dz} + y \right) = \frac{T_t}{I_t} \cdot \left(\frac{d\psi}{dz} + y \right) \quad (5)$$

$$\tau_{t,xy} = G \cdot \theta \cdot \left(\frac{d\psi}{dy} - z \right) = \frac{T_t}{I_t} \cdot \left(\frac{d\psi}{dy} - z \right) \quad (6)$$

kde G je smykový modul pružnosti materiálu a θ je tzv. poměrné zkroucení, tj. derivace (změna) pootočení jednotlivých průřezů podél osy konstrukce.

Primární smykové napětí lze alternativně vyjádřit i pomocí jiné parciální diferenciální rovnice, jejíž neznámou je tzv. Prandtlova funkce napětí ($\varphi(y,z)$), odpovídající smykovému toku na průřezu, vyvolanému volným kroucením:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -2 \cdot G \cdot \theta = -2 \cdot \frac{T_t}{I_t} \quad (7)$$

K rovnici přísluší okrajová podmínka definující nulovou hodnotu derivace Prandtlovy funkce napětí podle tečny okraje průřezu a příp. konkrétní hodnotu Prandtlovy funkce napětí podél vnitřních otvorů, pokud je průřez dutý. Diferenciální rovnice

(7) svou strukturou odpovídá tzv. Poissonově rovnici. Pro zajištění lze uvést, že rovnice stejného typu popisuje i tvar deformace membrány, resp. mýdlové bubliny, a proto je někdy řešení napjatosti průřezu od volného kroucení popisováno jako tzv. membránová analogie, resp. analogie mýdlové bubliny.

Primární smyková napětí podél obou kartézských souřadnic průřezu jsou poté definovány ve formě derivací Prandtlovy funkce napětí (tj. změny smykového toku) následovně:

$$\tau_{t,xz} = -\frac{d\varphi}{dy} \quad (8)$$

$$\tau_{t,xy} = \frac{d\varphi}{dz} \quad (9)$$

Složky primárního smykového napětí lze tedy stanovit více způsoby. Jejich výslednice (a tedy celkové primární smykové napětí) je pak dána jako délka vektoru pomocí vztahu:

$$\tau_t = \sqrt{\tau_{t,xz}^2 + \tau_{t,xy}^2} \quad (10)$$

Maximální hodnotu primárního smykového napětí lze formálně určit pomocí zavedení nové veličiny – modulu průřezu ve volném kroucení (W_t), využitě ve vztahu:

$$\tau_{t,max} = \frac{T_t}{W_t} \quad (11)$$

Samotný modul průřezu ve volném kroucení je do určité míry úměrný momentu tuhosti ve volném kroucení (I_t), tzn. je závislý na řešení deplanační funkce (ψ) a jeho vyjádření je tak možné pomocí analytického vztahu pouze pro velmi omezené tvary průřezů. Většinou je tak modul průřezu ve volném kroucení stanovován inverzně po nalezení průběhu napětí na průřezu:

$$W_t = \frac{T_t}{\tau_{t,max}} \quad (12)$$

Jedná se nicméně o velmi užitečnou veličinu v případě tenkostěnných průřezů, jak je ukázáno dále.

V případě vázaného kroucení jsou diferenciální rovnice popisující napjatost průřezu výrazně složitější (viz Schulz a Filippou 1998) a proto zde nejsou pro zachování stručnosti podrobně rozváděny. Jestliže ovšem pro rovnice popisující volné kroucení (3), (7) platí, že jejich analytické řešení lze nalézt pouze pro malou skupinu průřezů, pak pro rovnice popisující vázané kroucení platí téměř univerzálně, že jejich řešení je možné hledat pouze přibližně, pomocí numerických metod. Výjimku tvoří pouze tenkostěnné průřezy, viz dále.

Jednou z důležitých veličin vázaného kroucení, kterou lze definovat pomocí již výše zavedených funkcí je výsečový moment setrvačnosti (I_ω), který popisuje tuhost průřezu ve vázaném kroucení:

$$I_\omega = \iint \psi^2 dA \quad (13)$$

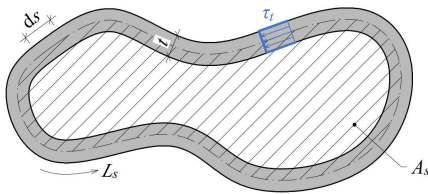
Výsečový moment setrvačnosti může být navíc využit pro stanovení normálového napětí od vázaného kroucení:

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega} \cdot \psi \quad (14)$$

Vztah pro výpočet poslední zbývající veličiny – sekundárního smykového napětí (τ_t) je pro obecný průřez komplexní (viz Sapountzakis a Mocos 2003) a proto zde není detailně rozveden.

2.3. Tenkostěnná teorie kroucení – uzavřené průřezy

Uzavřený tenkostěnný průřez vzniká vytvořením jednoho nebo více otvorů v původně masivním průřezu, přičemž je zachován vnější obrys a velikost otvoru/ů je pouze mírně menší než vnější rozměry průřezu. Zbývající tenkou obálku průřezu lze poté reprezentovat tzv. střednicí, tj. myšlenou křivkou půlicí obálku uprostřed její tloušťky. Střednice je uzavřená, což zásadně ovlivňuje odezvu při namáhání kroucením. Druhým důležitým parametrem pro popis tenkostěnného uzavřeného průřezu je samotná tloušťka obálky (viz Obrázek 5), která může být obecně proměnná.



Obrázek 5: Základní parametry tenkostěnného uzavřeného průřezu a rozložení primárního smykového napětí od kroucení po tloušťce obálky.

Pro zjednodušení bude nadále uvažován tenkostěnný uzavřený průřez pouze s jedním otvorem. Poté platí, že smykový tok od volného kroucení podél celé střednice je konstantní a nepřímo úměrný dvojnásobku plochy, kterou střednice uzavírá. Výsledné primární smykové napětí je pak dále nepřímo úměrné tloušťce obálky v konkrétním místě, platí tedy:

$$\tau_{t,TW,closed} = \frac{T_t}{2 \cdot A_s \cdot t} \quad (15)$$

kde A_s je plocha uzavřená střednicí průřezu a t je tloušťka obálky průřezu. Maximální primární smykové napětí pak tedy nastává v nejtenčí části průřezu (t_{min}), tedy:

$$\tau_{t,max,TW,closed} = \frac{T_t}{2 \cdot A_s \cdot t_{min}} \quad (16)$$

Z porovnání rovnic (11) a (16) pak lze odvodit, že modul průřezu ve volném kroucení pro tenkostěnný uzavřený průřez odpovídá hodnotě:

$$W_{t,TW,closed} = 2 \cdot A_s \cdot t_{min} \quad (17)$$

Pro úplnost je zároveň možné doplnit, že tuhost průřezu, reprezentovaná momentem tuhosti ve volném kroucení je naopak úměrná ploše uzavřené střednicí a tloušťce a nepřímo úměrná délce střednice, vyjádřeno vztahem:

$$I_{t,TW,closed} = \frac{4 \cdot A_s^2}{\oint \frac{1}{t} ds} \quad (18)$$

kde s je křivka odpovídající střednici obálky průřezu. Pro speciální případ tenkostěnného uzavřeného průřezu s konstantní

tloušťkou obálky lze poté křivkový integrál v rovnici (18) analyticky vyjádřit a vztah přepsat na:

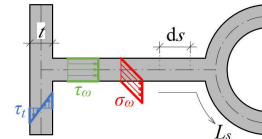
$$I_{t,TW,closed,const} = \frac{4 \cdot A_s^2 \cdot t}{L_s} \quad (19)$$

kde L_s je délka střednice obálky průřezu.

U uzavřených tenkostěnných průřezů může obecně docházet i k vázanému kroucení, ale pro většinu praktických případů jsou jeho účinky zanedbatelné (v některých speciálních případech dokonce nulové). Proto pro účely této studie není s vázaným kroucením u těchto průřezů nadále uvažováno.

2.4. Tenkostěnná teorie kroucení – otevřené průřezy

Otevřený tenkostěnný průřez na rozdíl od uzavřeného vzniká ztenčováním částí původního masivního průřezu, případně vytvářením dutin, které ovšem zasahují do vnějšího obrysu průřezu. Výsledný průřez sestává z několika tenkých ramen, spojených v jednom nebo více místech. Tato ramena lze opět reprezentovat jejich střednicí, půlicí jejich tloušťkou a poté samotnou tloušťkou ramen (viz Obrázek 6), která může být obecně proměnná. Zásadní rozdílem oproti výše popsaným uzavřeným tenkostěnným průřezům je, že střednice společně netvoří uzavřenou křivku, ale naopak několik křivek s volnými konci. Tím se zcela mění odezva při namáhání kroucením, a to jak pro volné, tak vázané kroucení.



Obrázek 6: Základní parametry tenkostěnného otevřeného průřezu a rozložení smykových a normálových napětí od kroucení po tloušťce ramen.

Tuhost tenkostěnného otevřeného průřezu ve volném kroucení je výrazně nižší než tuhost uzavřeného průřezu a je dána součtem tuhostí jednotlivých ramen průřezu:

$$I_{t,TW,open} = \frac{1}{3} \cdot \int t^3 ds \quad (20)$$

kde s je křivka odpovídající střednici ramen. V případě jednotné a konstantní tloušťky všech ramen lze pak vztah zjednodušit na:

$$I_{t,TW,open,const} = \frac{1}{3} \cdot t^3 \cdot L_s \quad (21)$$

kde L_s je celková délka střednic všech ramen.

Primární smykové napětí od volného kroucení je rozloženo lineárně po tloušťce jednotlivých ramen, přičemž extrémních hodnot nabývá na vnějších hranách a s využitím momentu tuhosti ve volném kroucení lze tuto hodnotu stanovit ze vztahu:

$$\tau_{t,TW,open} = \frac{T_t}{I_{t,TW,open}} \cdot t \quad (22)$$

A celkové největší primární smykové napětí pak nastává v nejtlustší části průřezu:

$$\tau_{t,max,TW,open} = \frac{T_t}{I_t} \cdot t_{max} \quad (23)$$

Porovnáním rovnice (11) a (23) lze formálně vyjádřit modul průřezu ve volném kroucení pro tenkostěnný otevřený průřez:

$$W_{t,TW,open} = \frac{I_{t,TW,open}}{t_{max}} \quad (24)$$

Který lze, pro případ jednotné a konstantní tloušťky všech ramen, po dosažení z rovnice (21), dále upravit na:

$$W_{t,TW,open,const} = \frac{1}{3} \cdot t^2 \cdot L_s \quad (25)$$

Na rozdíl od uzavřených tenkostěnných průřezů jsou pro otevřené tenkostěnné průřezy navíc zásadní i účinky vázaného kroucení. Deplanaci tenkostěnného průřezu lze velmi dobře aproximovat pomocí tzv. výšečové souřadnice (ω), která je definována jako dvojnásobek plochy vymezené referenčním bodem (tzv. středem smyku), počátkem, a zkoumaným bodem na střednici průřezu. Formálně zapsáno:

$$\omega(s) = \int \rho(s) ds \quad (26)$$

kde $\rho(s)$ je funkce popisující kolmou vzdálenost tečen jednotlivých bodů střednice od středu smyku. Výšečová souřadnice poté může být využita ke stanovení několika průřezových charakteristik, potřebných k analýze průřezu, specificky statického výšečového momentu ($S_{\omega,TW,open}$) a výšečového momentu setrvačnosti ($I_{\omega,TW,open}$):

$$S_{\omega,TW,open} = \int \omega \cdot t \cdot ds \quad (27)$$

$$I_{\omega,TW,open} = \int \omega^2 \cdot t \cdot ds \quad (28)$$

Tyto charakteristiky lze využít nejenom k hodnocení tuhosti průřezu ve vázaném kroucení, ale i ke stanovení sekundárního smykového napětí ($\tau_{\omega,TW,open}$) a normálového napětí ($\sigma_{\omega,TW,open}$) pomocí vztahu:

$$\tau_{\omega,TW,open} = - \frac{T_{\omega} \cdot \hat{S}_{\omega,TW,open}}{I_{\omega,TW,open} \cdot t} \quad (29)$$

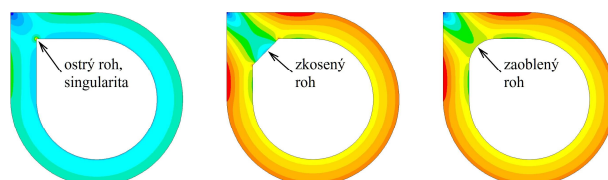
$$\sigma_{\omega,TW,open} = \frac{B}{I_{\omega,TW,open}} \cdot \omega \quad (30)$$

kde $\hat{S}_{\omega,TW,open}$ je tzv. statický výšečový moment odňaté části průřezu, který se principiálně vypočte dle rovnice (27), ale pouze pro určitou odříznutou část průřezu, kdy v místě řezu má být vyhodnoceno sekundární smykové napětí. Maximální a minimální hodnoty sekundárního smykového, resp. normálového napětí na průřezu se pak obecně nachází v místech extrémních hodnot poměru $\hat{S}_{\omega,TW,open}/t$, resp. extrémních hodnot souřadnice ω .

2.5. Koncentrace napětí v rozích tenkostěnných průřezů

Závěrem k teorii kroucení je nutno poznamenat, že u průřezů s vnitřními rohy dochází v těchto místech k výrazné koncentraci napětí, které lokálně roste nade všechny meze, což vyplývá ze struktury rovnic popisujících průběh napětí, jako např. rovnice (7), jelikož se matematicky jedná o tzv. singulární body.

Problematika koncentrace napětí přesahuje záměry tohoto článku (podrobněji se jí zabývá např. Timoshenko a Goodier 1987), proto je pouze stručně konstatováno, že tyto singulární body lze potlačit buď zkosněním nebo lépe zaoblením vnitřních rohů (viz Obrázek 7). Pro účely analýzy průřezů byly v této studii tyto body ignorovány a napětí bylo hodnoceno pouze v takových místech průřezů, které jsou od singularit dostatečně vzdáleny, a tedy nejsou jimi ovlivněny.



Obrázek 7: Koncentrace napětí ve vnitřních rozích průřezů a příklady dvou možností její eliminace – zkosnění, zaoblení.

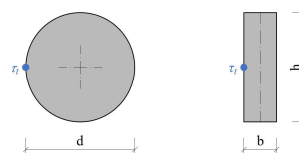
3. ANALÝZA VYBRANÝCH PRŮŘEZŮ

Na následujících řádcích je analyzována napjatost při kroucení pro 7 vybraných průřezů, které lze považovat za nejčastěji využívané pro konstrukce z betonu, resp. UHPC – 2 základní tvary, 3 uzavřené (tzv. komorové) a 2 otevřené. U 6 z těchto průřezů je pak porovnána aproximace napětí pomocí tenkostěnné teorie kroucení (viz kapitoly 2.3. a 2.4.) s „přesným“ řešením pomocí obecné teorie kroucení (viz kapitola 2.2.).

Pro řešení řídicích diferenciálních rovnic obecné teorie kroucení (tj. např. rovnice (7)) byl využit výpočetní software SCIA Engineer 25.0 a jeho modul 2D MKP analýzy průřezů libovolné geometrie. Naopak rovnice tenkostěnné teorie kroucení byly řešeny analyticky (v článku jsou pro zachování stručnosti uvedeny pouze analytické vztahy volného kroucení, jelikož vztahy pro vázané kroucení jsou komplexní).

3.1. Základní průřezy

Před analýzou samotných „tenkostěnných“ průřezů byla nejprve zkoumána napjatost dvou nejtypičtějším základních průřezů – kruhového a obdélníkového (viz Obrázek 8).



Obrázek 8: Vybrané základní průřezy, značení rozměrů a místa stanovení napětí.

Pro plný kruhový průřez neexistuje tenkostěnná aproximace, ale jelikož se jedná o jediný průřez (spolu s tzv. mezikružím), který nedeplanuje, existuje pro něho zcela přesné obecné analytické řešení. Zároveň se jedná o průřez, který tvoří jakýsi srovnávací práh pro všechny ostatní masivní průřezy, jelikož má

ze všech plných průřezů nejvyšší tuhost a je vystaven nejmenšímu napětí, při stejné ploše a stejné hodnotě torzního namáhání všech potenciálních masivních průřezů.

Tuhost kruhového průřezu ve volném kroucení je shodná s tzv. polárním momentem setrvačnosti (vzhledem k nulové deplanaci) a je dána vztahem:

$$I_t = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad (31)$$

A maximální primární smykové napětí (na hraně průřezu) lze stanovit pomocí dosazení modulu průřezu ve volném kroucení do rovnice (11):

$$W_t = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad (32)$$

V případě obdélníkového průřezu již k deplanaci dochází, nicméně stále je možné nalézt analytické řešení řídicích diferenciálních rovnic volného kroucení, ačkoliv je výrazně složitější a nemá uzavřený tvar. Pro moment tuhosti ve volném kroucení se jedná o vztah:

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \cdot \tanh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right) \right] \cdot b^3 h \quad (33)$$

Spíše než komplexní vztah pro modul průřezu ve volném kroucení, je pak výhodnější definovat přímo vztah pro maximální primární smykové napětí, které vzniká vždy uprostřed dvou delších stran obdélníkového průřezu (tj. uprostřed výšky průřezu h) a nabývá hodnoty:

$$\tau_{t,max} = \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b}\right)} \right] \cdot \frac{T_t}{I_t} \cdot b \quad (34)$$

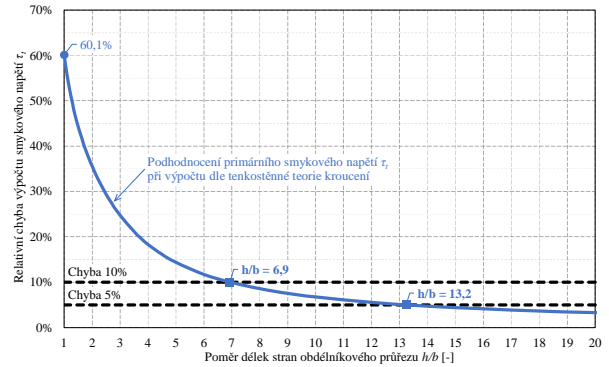
Pro obdélníkový průřez již nicméně existuje i tenkostěnná aproximace výše uvedených vztahů, jelikož lze obdélník považovat defacto za speciální případ otevřeného tenkostěnného průřezu s jediným ramenem konstantní tloušťky b . Vztah pro moment tuhosti ve volném kroucení se pak výrazně zjednoduší do podoby:

$$I_{t,TW} = \frac{1}{3} \cdot b^3 h \quad (35)$$

A maximální primární smykové napětí lze poté stanovit ze vztahu:

$$\tau_{t,max,TW} = T_t \cdot \frac{3}{b^2 \cdot h} \quad (36)$$

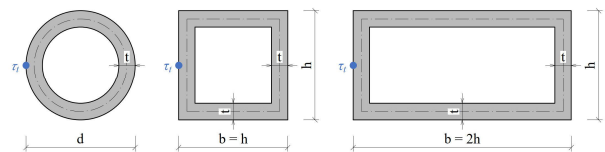
Jelikož hlavním cílem této studie je nalezení mezní hodnoty štíhlosti průřezu na základě přesnosti aproximace napětí tenkostěnnou teorií, je v grafu na Obrázku 9 vykreslena relativní chyba tenkostěnné rovnice (36) v porovnání s přesným řešením (rovnice (34)).



Obrázek 9: Porovnání tenkostěnné a obecné teorie kroucení při výpočtu primárního smykového napětí na obdélníkovém průřezu.

3.2. Tenkostěnné uzavřené průřezy

Pro analýzu uzavřených průřezů byly zvoleny 3 typické geometrie – kruhový, čtvercový a obdélníkový komorový průřez (viz Obrázek 10). Vnější poměr stran obdélníkového komorového průřezu byl zvolen 2:1.



Obrázek 10: Vybrané uzavřené průřezy, značení rozměrů a místa stanovení napětí.

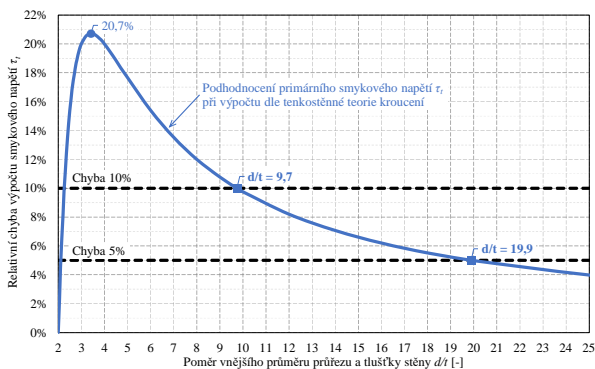
Kruhový komorový průřez zachovává vlastnost plného kruhového průřezu – nedeplanuje. Díky tomu je možné i pro tento průřez nalézt analytické řešení řídicích rovnic. Při vyjádření obecného řešení maximálního smykového napětí pomocí základních rozměrů – vnějšího průměru d a tloušťky t platí následující vztah:

$$\tau_{t,max} = T_t \cdot \frac{16}{\pi \cdot d^3 \cdot \left[1 - \left(1 - 2 \cdot \frac{t}{d} \right)^4 \right]} \quad (37)$$

A v kontrastu, při uvážení tenkostěnné teorie, po dosazení do rovnice (16) platí pro kruhovou komoru vztah:

$$\tau_{t,max,TW} = T_t \cdot \frac{2}{\pi \cdot d^2 \cdot t \cdot \left(1 - \frac{t}{d} \right)^2} \quad (38)$$

Porovnání tenkostěnné teorie (rovnice (38)) a obecné teorie (rovnice (37)) kroucení je uvedeno na Obrázku 11.

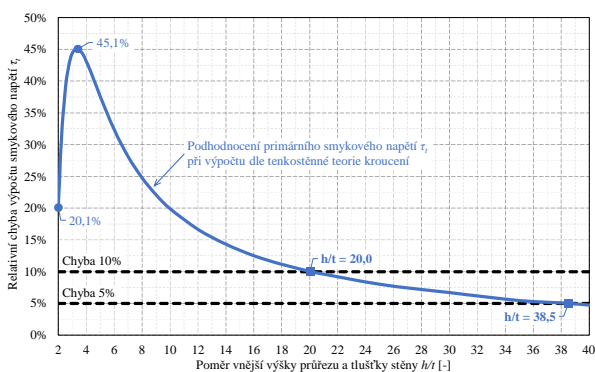


Obrázek 11: Porovnání tenkostěnné a obecné teorie kroucení při výpočtu primárního smykového napětí na průřezu kruhové komory.

Pro čtvercový komorový průřez (a všechny další průřezy prezentované dále v tomto článku) již obecné analytické řešení neexistuje. Za přesné řešení je proto považováno numerické řešení řídicích rovnic (viz kapitola 2.2.) pomocí metody konečných prvků. Nadále jsou tedy uváděny pouze vztahy pro výpočet napětí dle tenkostěnné teorie kroucení, specificky maximální primární smykové napětí, dosazením do rovnice (16). Pro čtvercový komorový průřez shodné vnější výšky i šířky h poté platí tenkostěnný vztah:

$$\tau_{t,max,TW} = T_t \cdot \frac{1}{2 \cdot h^2 \cdot t \cdot \left(1 - \frac{t}{h}\right)^2} \quad (39)$$

A porovnání tenkostěnné a obecné teorie kroucení je graficky znázorněno na Obrázku 12.

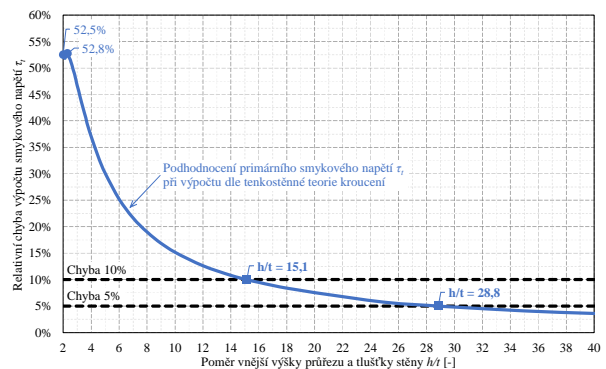


Obrázek 12: Porovnání tenkostěnné a obecné teorie kroucení při výpočtu primárního smykového napětí na průřezu čtvercové komory.

Pro obdélníkový komorový průřez vnější šířky b a vnější výšky h lze odvodit tenkostěnný vztah:

$$\tau_{t,max,TW} = T_t \cdot \frac{1}{2 \cdot b \cdot h \cdot t \cdot \left(1 - \frac{t}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{t}{h}\right)} \quad (40)$$

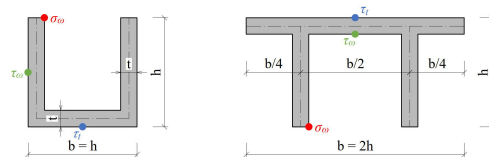
A relativní chybu tenkostěnné teorie v porovnání s a obecnou teorií kroucení ukazuje graf na Obrázku 13.



Obrázek 13: Porovnání tenkostěnné a obecné teorie kroucení při výpočtu primárního smykového napětí na průřezu obdélníkové komory poměru 2:1.

3.3. Tenkostěnné otevřené průřezy

Pro analýzu otevřených průřezů byly vybrány 2 geometrie průřezů (viz Obrázek 14) – tvar U s vnějším poměrem stran 1:1 a tvar TT s vnějším poměrem stran 2:1 a stojinami v krajních čtvrtinách celkového rozpětí průřezu.



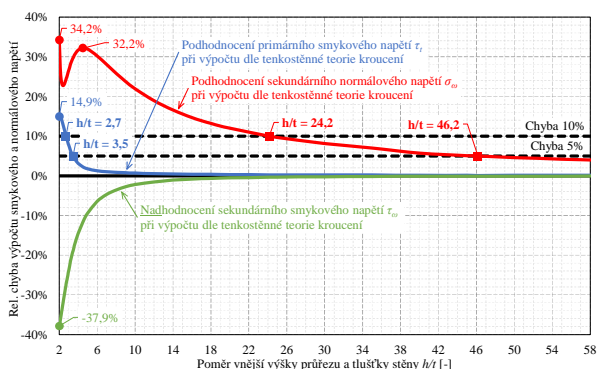
Obrázek 14: Vybrané otevřené průřezy, značení rozměrů a místa stanovení napětí.

Jak bylo uvedeno již v kapitole 2.4. otevřené průřezy obecně výrazně deplanují a účinky vázaného kroucení jsou u nich významné až dominantní. Proto byly u obou průřezů zkoumány všechny typy napětí od kroucení – primární smykové napětí τ , sekundární smykové napětí τ_ω a normálové napětí σ_ω . Pro stručnost jsou nicméně uvedeny analytické vztahy tenkostěnné teorie jen pro volné kroucení, dosazením do rovnic (20) a (23). Pro vázané kroucení pak obecně platí vztahy (29) a (30).

Pro otevřený průřez tvaru U lze odvodit vztah pro maximální primární smykové napětí:

$$\tau_{t,max,TW} = T_t \cdot \frac{1}{h \cdot t^2 \cdot \left(1 - \frac{2t}{3h}\right)} \quad (41)$$

Porovnání tenkostěnné a obecné teorie pro tento průřez je pak uvedeno na Obrázku 15.

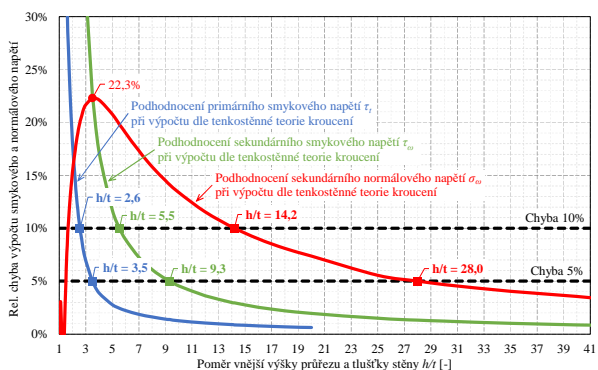


Obrázek 15: Porovnání tenkostěnné a obecné teorie kroucení při výpočtu primárních a sekundárních napětí na průřezu tvaru U poměru 1:1.

A nakonec, pro otevřený průřez tvaru TT lze maximální primární smykové napětí vyjádřit vztahem:

$$\tau_{t,max,TW} = T_t \cdot \frac{3}{t^2 \cdot [b+h \cdot (2-\frac{t}{h})]} \quad (42)$$

Následné porovnání tenkostěnné a obecné teorie pro tento průřez je znázorněno Obrázek 16.



Obrázek 16: Porovnání tenkostěnné a obecné teorie kroucení při výpočtu primárních a sekundárních napětí na průřezu tvaru TT poměru 2:1.

4. VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ A DISKUSE

Na grafech v kapitole 3 byla graficky reprezentována relativní chyba výpočtu napětí dle tenkostěnné teorie kroucení v porovnání s obecnou teorií kroucení pro 6 vybraných průřezů, jejichž geometrie patří k nejčastěji používaným pro betonové (resp. UHPC) konstrukce. Ze všech grafů je zřejmý očekávaný předpoklad, že s rostoucí štíhlostí průřezů klesá chyba tenkostěnné teorie a limitně se blíží obecnému (přesnému) řešení.

U některých průřezů (např. kruhové komory) je překvapivé zjištění, že pro velmi malou štíhlost tenkostěnná teorie rovněž velmi dobře aproximuje hodnoty napětí, ale poté chyba narůstá a pro účely této studie je tak toto pozorování spíše náhodným jevem, daným strukturou jednotlivých rovnic a pro další vyhodnocení tato skutečnost pozbývá praktického významu.

4.1. Limitní štíhlost tenkostěnných průřezů

V grafech v kapitole 3 lze ale především najít odpověď na hlavní otázku této studie, tedy hodnotu limitní (mezní) štíhlosti, při které lze daný průřez považovat za tenkostěnný. Výsledek je přitom závislý na požadované míře přesnosti (resp. přijatelné míře chybovosti).

Pro účely této studie byly zvoleny dvě hladiny přípustné chyby aproximace napětí – 10 % a 5 %, které lze z hlediska praktického navrhování považovat za rozumné a limitní hodnoty štíhlosti pro tyto dvě hladiny jsou přehledně shrnuty v Tabulce 1. Z jednotlivých grafů nicméně mohou být odečteny limitní štíhlosti i pro jakoukoliv jinou požadovanou přesnost (resp. míru chyby).

Tabulka 1: Limitní hodnoty štíhlosti zkoumaných tenkostěnných průřezů pro přijatelnou chybu aproximace napětí 10 % a 5 %.

Tvar průřezu	Limitní štíhlost pro přípustnou chybu:		Napětí
	10 %	5 %	
Obdélník	$h/b \geq 6,9$	$h/b \geq 13,2$	τ_t
Kruhová komora	$d/t \geq 9,7$	$d/t \geq 19,9$	τ_t
Čtvercová komora	$h/t \geq 20,0$	$h/t \geq 38,5$	τ_t
Obdélníková komora 2:1	$h/t \geq 15,1$	$h/t \geq 28,8$	τ_t
Otevřený U-průřez 1:1	$h/t \geq 24,2$	$h/t \geq 46,2$	σ_{ω}
Otevřený TT-průřez 2:1	$h/t \geq 14,2$	$h/t \geq 28,0$	σ_{ω}

4.2. Diskuse

Z hodnot uvedených v Tabulce 1 je zřejmé, že limitní štíhlost zkoumaných průřezů se pohybuje v rozmezí 6,9-24,2 pro 10 % míru chyby tenkostěnné teorie a v rozmezí 13,2-46,2 pro 5 % míru chyby. Nejmenší požadovaná štíhlost pro prohlášení průřezu za tenkostěnný nastává u obdélníkového průřezu, zatímco nejvyšší štíhlost je požadována u průřezu tvaru U.

V kapitole 1.3. bylo zmíněno, že tradičně je za limitní štíhlost považována hodnota ≥ 10 . Tato studie ukazuje, že uvedená hodnota limitní štíhlosti je být dostatečná pouze pro dva z celkových šesti zkoumaných průřezů (obdélník a kruhovou komoru) a to pouze za předpokladu přípustné 10 % chyby tenkostěnné teorie. Pro ostatní průřezy je empiricky stanovená hodnota limitní štíhlosti nedostatečná a v některých případech se blíží až k hodnotě 50 (pro 5 % míru chyby).

5. ZÁVĚR

V článku byla prezentována studie zaměřená na vytvoření jednoznačné metodiky klasifikace tenkostěnných průřezů, resp. rozlišení průřezů masivních a tenkostěnných. Tato otázka nabývá na významu v posledních letech s rozvojem moderních cementových kompozitů (specificky UHPC), které umožňují realizovat konstrukce s průřezy blížícími se svou štíhlostí průřezům ocelových konstrukcí. Klasifikace těchto průřezů z UHPC je často nejasná a dosavadní empirický až „zvyklostní“ přístup se ukazuje jako nedostatečný.

U šesti zvolených průřezů typické geometrie bylo provedeno porovnání přesnosti (resp. chybovosti) tenkostěnné teorie kroucení vůči obecné (přesné) teorii kroucení. Výsledky jednoznačně ukazují, že při požadavku na maximální chybu aproximace do 10 % resp. 5 % dosavadní empirický limit štíhlosti (běžně uvažovaný hodnotou 10) až na výjimky nedostačuje, a naopak se ve skutečnosti v závislosti na typu průřezu může blížit až k hodnotě 25 (pro míru chyby 10 %), resp. až k hodnotě 50 (pro míru chyby 5 %).

5.1. Náměty na budoucí výzkum

Prezentovaná studie se omezila pouze na šest vybraných průřezů, které byly vyhodnoceny jako nejtypičtější. Pro zobecnění výsledků bude zapotřebí množství analyzovaných průřezů výrazně rozšířit, a přitom se pokusit najít určité jednotící kritérium, které by umožnilo výsledky seskupit, aby nebylo zapotřebí definovat individuální hodnotu limitní štíhlosti pro každý průřez samostatně.

PODĚKOVÁNÍ

Prezentovaná studie byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS25/038/OHK1/1T/11 (*Konstrukce z moderních cementových kompozitů a jejich optimalizace*).

Literatura

- Bažant, Z. P. (1965), *Non-uniform Torsion of Thin-walled Bars of Variable Section*. IABSE Zurich.
- Delauzun, O., Rogat, D., Boutillon, L., Linger, L. & Clergue, Ch. (2009), *Construction du pont de la Chabotte en BFUP sur l'autoroute A51*. fib-AFGC – Designing and Building with UHPFRC: State of the Art and Development.
- Graybeal, B. A. (2009), *Structural Behavior of a 2nd Generation Ultra-High Performance Concrete Pi-Girger*. Office of Infrastructure Research & Development, Federal Highway Administration (FHWA).
- Sapountzakis, E. J. & Mokos, V. G. (2003), Warping shear stresses in nonuniform torsion by BEM. *Computational Mechanics* 30(2), 131-142.
- SCIA Engineer 25.0.2011.64, <https://www.scia.net/en>.
- Schulz, M. & Filippou, F. C. (1998), Generalized Warping Torsion Formulation. *Journal of Engineering Mechanics* 124(3), 339-347.
- Timoshenko, S. P. & Goodier, J. N. (1987), *Theory of elasticity*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill. ISBN 0-07-064720-8.